



# Une analyse des possibilités de contrôle électromagnétique des surfaces libres de métaux fondus

Marcel Garnier

## ► To cite this version:

Marcel Garnier. Une analyse des possibilités de contrôle électromagnétique des surfaces libres de métaux fondus. Electromagnétisme. UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE; INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1982. Français. NNT: . tel-01340741

**HAL Id: tel-01340741**

**<https://hal.science/tel-01340741>**

Submitted on 1 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Hay*

N° d'ordre

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

ET

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

**Marcel GARNIER**

Ingénieur E.N.S.H.G.

S U J E T

**Une analyse des possibilités  
de contrôle électromagnétique  
des surfaces libres de métaux fondus.**

---

Soutenue le 15 Mars 1982 devant la Commission d'Examen

M. DESRE

Président

M. GERMAIN

M. GRANDPIERRE

M. MOREAU

Examineurs

M. PERRET

M. VALENTIN



## AVANT PROPOS

Mes plus vifs remerciements vont à Monsieur René MOREAU à qui je tiens à exprimer une profonde reconnaissance et une sincère gratitude.

Je remercie Monsieur DESRE de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury, ainsi que Messieurs GERMAIN, GRANDPIERRE, PERRET et VALENTIN qui ont bien voulu l'assister.

La collaboration avec Mademoiselle Jacqueline ETAY et Monsieur Jean-Marc BIASSE a toujours été agréable, fructueuse et amicale : qu'ils sachent combien je leur en suis reconnaissant.

Monsieur Roland ERNST a su m'apporter une aide efficace, souvent décisive, reposant sur une compétence unique et sûre en électrotechnique, je l'en remercie vivement.

Globalement tous les membres du GIS MADYLAM, sous l'impulsion de son directeur, ont su créer un climat d'échanges et de coopération très motivant et très constructif, propre à faire naître et à entretenir le dynamisme, qu'ils en soient remerciés.

Qu'il me soit permis de rendre hommage au travail des techniciens, notamment Messieurs BARBET et BOLCATO, sans lequel toute la partie expérimentale de mon travail n'aurait pu voir le jour. Je voudrais remercier plus particulièrement Monsieur GIROUTRU dont l'incomparable dévouement ne trouve d'égal que dans l'efficacité et la compétence.

Il m'est malheureusement impossible de remercier individuellement chacune des personnes des divers services de l'Institut de Mécanique : qu'elles sachent cependant combien leur aide individuelle, ponctuelle ou de longue durée, m'a été précieuse, et soient convaincues que je les associe à la réussite de mon travail.



## S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION</u> .....	1
<u>CHAPITRE I : LE CONTROLE DE FORME</u> .....	11
<u>1) Position du problème</u> .....	12
<u>2) Le problème inverse</u> .....	13
<u>3) Le problème direct</u> .....	18
<u>4) Une application particulière des champs magnétiques         mobiles au contrôle de la forme d'une surface         libre à l'encontre des forces de pesanteur</u> .....	20
<u>5) Confinement, centrage et guidage électromagnétiques         d'un jet de métal liquide</u> .....	29
<u>1) Introduction</u> .....	29
<u>2) Les "trous de potentiel et leur réalisation"</u> .....	32
<u>3) Détermination analytique des effets électro-                 magnétiques produits dans un métal liquide                 par un trou de potentiel</u> .....	38
<u>4) Conclusion</u> .....	56
<u>6) Le contrôle électromagnétique des surfaces         métalliques liquides et ses applications</u> .....	59
<u>1) Introduction</u> .....	60
<u>2) L'effet de peau électromagnétique et ses                 implications</u> .....	62
<u>3) Etude expérimentale</u> .....	64
<u>4) Comparaison entre les résultats expérimentaux                 et les résultats théoriques</u> .....	70
<u>5) Conclusion</u> .....	72

CHAPITRE II : CONFINEMENT ELECTROMAGNETIQUE DE VEINES

METALLIQUES LIQUIDES .....	93
<u>1)</u> Le dispositif de confinement électromagnétique "haute fréquence" .....	95
<u>2)</u> Le dispositif de confinement électromagnétique "basse fréquence" .....	100
<u>2.1.)</u> Les observations expérimentales .....	100
<u>2.2.)</u> Interprétation du phénomène .....	106
<u>3)</u> Considérations sur la stabilité du phénomène de confinement électromagnétique "basse fréquence" .....	107
<u>4)</u> Les perspectives d'applications industrielles .....	113

CHAPITRE III : STABILITE DES SURFACES LIBRES DE METAUX LIQUIDES

CONTROLEES PAR DES CHAMPS MAGNETIQUES ALTERNATIFS .....	117
<u>1)</u> L'hypothèse de profondeur de pénétration nulle .....	120
<u>2)</u> Analyse de la stabilité d'une interface soumise à l'action d'un champ magnétique alternatif uniforme. Limites de l'hypothèse $\delta = 0$ .....	121
<u>3)</u> Comparaison des critères de stabilité des surfaces libres soumises à des champs magnétiques alternatifs et à des champs magnétiques continus .....	127
<u>4)</u> Possibilités d'application, à des situations concrètes, des résultats de la théorie précédente. Effet de la non uniformité du champ magnétique .....	131
<u>5)</u> Conclusion .....	139
<u>6)</u> Stability of an interface submitted to an alternating magnetic field .....	141
<u>1)</u> Introduction .....	142
<u>2)</u> Formulation of the problem .....	145
<u>3)</u> Dispersion relation and analytical results .....	152
<u>4)</u> Conclusion .....	157

CHAPITRE IV : APPLICATION DES TECHNIQUES DU GROUPE DE RENORMALISATION

A L'ETUDE DE LA TURBULENCE HOMOGENE M.H.D. A FAIBLE

NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE ..... 165

- *Influence of an external magnetic field on large  
scale low magnetic Reynolds number M.H.D.  
turbulence* ..... 167

1) *Introduction* ..... 168

2) *Existence of a crossover* ..... 170

3) *Renormalization group procedure* ..... 172

- The method ..... 173

- Elimination of the small scales ..... 173

- Rescaling of the variables ..... 178

- Iteration of the R G transformation ; the recursion  
relations ..... 178

- The effective equations ..... 181

4) *Concluding remarks* ..... 183

CONCLUSION ..... 187

ANNEXES

## I N T R O D U C T I O N

La magnétohydrodynamique (M.H.D.), dont l'objet est l'étude des interactions entre les écoulements de fluides électroconducteurs et les champs magnétiques qui leur sont appliqués, représente une discipline extrêmement vaste qui fait beaucoup plus que recouvrir la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. En effet, elle ne peut être réduite ni à la mécanique des fluides en présence de forces électromagnétiques, ni à l'électromagnétisme des fluides en mouvement, puisque la juxtaposition de ces disciplines fait apparaître des phénomènes qui n'ont aucun équivalent ni dans l'une, ni dans l'autre. Les ondes d'Alfvén en sont l'exemple le plus connu. L'ensemble des phénomènes de contrôle électromagnétique des surfaces libres de métaux fondus, objet de ce mémoire, en est un autre exemple. Le cas limite des fréquences assez élevées pour que la profondeur de pénétration du champ magnétique et des courants de Foucault soit beaucoup plus petite que toutes les autres échelles de longueur est très lumineuse à ce propos. On est alors en présence d'un problème "intérieur" (dans le fluide) de mécanique des fluides, et d'un problème "extérieur" (hors du fluide) d'électromagnétisme, couplés par les conditions à l'interface. Le seul fait que celle-ci soit la surface libre d'un fluide conducteur rend non trivial l'un et l'autre, et empêche qu'ils puissent être abordés dans le cadre des deux disciplines séparées.

Les équations mises en jeu sont l'ensemble des équations de Maxwell, de la loi d'Ohm, des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité. Dans ce domaine très vaste les grandes classes de problèmes se distinguent les unes des autres par les ordres de grandeur des paramètres adimensionnels caractéristiques de l'importance relative des divers mécanismes physiques impliqués. Notamment, deux paramètres conduisent de façon claire à une différenciation des

problèmes : le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$  et un paramètre construit de façon tout à fait parallèle  $R_\omega$ . Ce dernier, à cause de son passé très récent, n'a pas reçu encore de dénomination consacrée par l'usage : nous l'appellerons "paramètre d'écran".

Ces paramètres apparaissent simultanément dans l'équation d'évolution du champ magnétique. Dans un milieu électroconducteur de dimension caractéristique  $L$ , de conductivité électrique  $\sigma$  et de perméabilité magnétique  $\mu$ , sujet à un écoulement dont l'échelle typique est  $V$ , elle s'écrit :

$$R_\omega \frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau} = \Delta \vec{b} + R_m \vec{R} \vec{b} (\vec{u} \wedge \vec{b})$$

où : -  $\vec{u}$  et  $\vec{b}$  désignent la vitesse et le champ magnétique rapportés à leurs valeurs typiques respectives

-  $\tau$  le temps rendu adimensionnel avec le temps  $T$  caractéristique de l'évolution des phénomènes dans le repère considéré,

$\Delta$  et  $\vec{R} \vec{b}$  les opérateurs adimensionnels associés à l'échelle  $L$

avec :  $R_m = \mu \sigma V L$

$$R_\omega = \mu \sigma L^2 / T$$

Deux grandes classes de problèmes se font jour à ce niveau : celle pour laquelle le temps caractéristique d'évolution du champ magnétique est imposée par des conditions extérieures (cas des champs magnétiques alternatifs de pulsation  $\omega$  ;  $T \sim \omega^{-1}$ ) et celle pour laquelle le temps caractéristique  $T$  est un temps de transit des particules fluides dans le domaine considéré ( $T \sim L/V$ ).

#### a) Cas des champs magnétiques continus

Lorsque  $T \sim L/V$ , le paramètre  $R_\omega$  perd sa signification et seul le paramètre  $R_m$ , auquel il est égal, est pertinent pour le système dans lequel  $\vec{b}$  est régi par l'équation :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau} = \frac{1}{R_m} \Delta \vec{b} + \vec{R} \vec{b} (\vec{u} \wedge \vec{b})$$

Si les échelles du système sont grandes, le nombre de Reynolds magnétique est grand devant l'unité. Aussi tout effet de diffusion du champ magnétique peut-il être négligé devant les effets de convection par le champ de vitesse qui sont dominants (ce qui justifie a posteriori  $T \sim L/V$ ). L'équation de l'induction s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = R \vec{\omega} \times (\vec{u} \wedge \vec{b})$$

Les lignes de champ magnétique sont alors des lignes matérielles toujours constituées des mêmes particules fluides : elles se déplacent avec le fluide et se comportent comme si elles étaient en permanence attachées à lui : c'est ce qu'Alfvén exprime en disant que champ magnétique et champ de vitesse sont "gelés ensemble" (1). Ceci se produit dans les phénomènes astrophysiques où échelles de longueur et de vitesse sont gigantesques. Les nombres de Reynolds magnétiques les plus élevés que l'on puisse rencontrer à l'échelle humaine sont de l'ordre de 10 ; ils correspondent à l'énorme cuve de sodium liquide des réacteurs nucléaires surgénérateurs (2).

A l'échelle du laboratoire, ou à celle des installations industrielles, avec les métaux fondus classiques, le nombre de Reynolds magnétique est toujours faible devant l'unité ( $R_m \leq 10^{-1}$ ) et tout effet de convection du champ magnétique peut être négligé. Le champ magnétique est donc celui qui existerait dans la même géométrie si le milieu électroconducteur était immobile. L'équation de l'induction se réduit alors à :

$$\Delta \vec{b} = \vec{0}$$

#### b) Cas des champs magnétiques alternatifs

A l'échelle du laboratoire, il est possible d'imposer un champ magnétique extérieur alternatif attaché à une échelle de temps  $T \sim \omega^{-1}$ . Dans tout milieu électroconducteur, ce champ magnétique est régi par un mécanisme de diffusion traduit par l'équation de l'induction réduite à :

$$R_\omega \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \Delta \vec{b} \quad \text{avec} \quad R_\omega = \mu \sigma \omega L^2$$

Ceci implique nécessairement que l'échelle de longueur  $\delta$  associée au champ magnétique ne peut être quelconque mais vérifie :

$$R_{\delta} = \mu \sigma \omega \delta^2 \sim 1$$

Ainsi les variations du champ magnétique sont localisées dans une couche d'épaisseur  $\delta$  située à la périphérie des domaines électroconducteurs : la peau électromagnétique.

Un avantage important de la M.H.D. avec champ magnétique alternatif vis à vis de la M.H.D. avec champ magnétique continu apparaît ici, grâce à la présence de la pulsation dans le paramètre d'écran  $R_{\omega}$ . Un degré de liberté supplémentaire, c'est à dire une possibilité de contrôle extérieur, est introduit qui n'a pas son équivalent avec les champs magnétiques continus pour lesquels  $R_m$  est fixé par le système lui-même. Ainsi, même avec des champs magnétiques peu intenses et des conductivités électriques modérées, il est possible d'obtenir des effets électromagnétiques importants en augmentant la pulsation  $\omega$ . Ceci est clair si l'on compare l'ordre de grandeur des forces électromagnétiques  $\vec{F}$  qu'il est possible d'obtenir avec les deux types de champs magnétiques pour un système donné et une intensité  $B_0$  du champ magnétique imposée. Pour un champ magnétique alternatif :

$$j \sim \frac{B_0}{\mu \delta} \quad \text{et} \quad F = F_{\omega} \sim j B_0 = \frac{B_0^2}{\mu \delta}$$

Pour un champ magnétique continu :

$$j \sim \sigma V B_0 \quad \text{et} \quad F_c \sim \sigma V B_0^2$$

ou si le courant  $j_0$  est imposé par conduction :

$$F = F'_c \sim j_0 B_0$$

Ainsi

$$\frac{F_{\omega}}{F'_c} = \frac{B_0}{j_0} \left( \frac{\sigma \omega}{\mu} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{F_{\omega}}{F_c} \sim \frac{1}{V} \left( \frac{\omega}{\mu \sigma} \right)^{1/2}$$

Chacun de ces rapports, proportionnel à  $\omega^{1/2}$ , peut être rendu très grand par simple augmentation de  $\omega$ , dont la modification est facile, et qui, de plus, offre une plage de variation beaucoup plus étendue que  $V$ ,  $j_0$  ou  $B_0$  puisqu'un rapport  $10^6$  peut exister entre les pulsations faibles et les pulsations fortes.



La M.H.D. en présence de champs magnétiques alternatifs, qui peut être associée au paramètre d'écran  $R_\omega$ , est très jeune contrairement à la M.H.D. pour laquelle le paramètre pertinent est  $R_m$  qui possède aujourd'hui un certain caractère classique et fait l'objet de divers manuels. En effet, ce sont principalement les études relatives à cette dernière qui se sont développées initialement, (dès le XIX<sup>ème</sup> siècle) (3), de façon parallèle à l'échelle du laboratoire ( $R_m \ll 1$ ), avec par exemple les travaux sur les écoulements en conduites (4) (5), et en astrophysique ( $R_m \gg 1$ ), où les possibilités de présence d'effet dynamo notamment (6), ont très tôt suscité un très vif intérêt. Cet intérêt a toujours été entretenu par l'existence d'effets électromagnétiques très intenses à cause du fait que les échelles astronomiques permettent de compenser la faiblesse de la conductivité électrique et des champs magnétiques appliqués (7). Cette situation est tout à fait parallèle à celle obtenue avec des champs magnétiques alternatifs ou cette compensation peut être effectuée par une augmentation de  $\omega$  ( $R_\omega \gg 1$ ).

Les études relatives aux champs magnétiques alternatifs n'ont, en comparaison, connu aucun développement d'importance équivalente ; elles ont tout au plus donné lieu à quelques études très ponctuelles liées très directement à des applications industrielles (pompage, lévitation), toutes apparues après la deuxième guerre mondiale.

Si les études théoriques concernant les grands nombres de Reynolds magnétiques n'ont jamais connu de déclin (8), les travaux relatifs à la M.H.D. à l'échelle du laboratoire en présence de champs magnétiques continus, très nombreux durant les années 1950 à 1970, ont connu par la suite une baisse d'intérêt très nette. C'est celle-ci qui a motivé l'organisation en 1976 du premier colloque sur la M.H.D. (Euromech 70 CNRS Colloquium - Villard de Lans) (9). A l'incertitude exprimée dans la phrase d'ouverture du colloque : "Où va la M.H.D. ?", a succédé une réelle prise de conscience du vaste champ d'application industriel, métallurgique notamment, ouvert à la M.H.D., qui permettait à la fois d'exploiter les résultats des travaux antérieurs et qui, surtout, posait des problèmes nouveaux et riches. De cette fusion intime entre recherche fondamentale et recherche appliquée, trop souvent mises en opposition, sont apparues des voies nouvelles jugées "more worthwhile than dotting the i's and crossing the t's of the previous generation of M.H.D. problems, such as laminar duct flows with constant magnetic fields". La M.H.D. avec champs magnétiques alternatifs traçait à elle seule un axe de recherche très prometteur



dans cette nouvelle génération de problèmes : non seulement au niveau des applications industrielles, liées notamment au contrôle des écoulements, au brassage, à la purification des métaux fondus, mais aussi au niveau des études théoriques concernant par exemple les effets des champs magnétiques glissant ou pulsant sur les écoulements, les recirculations qu'ils induisent, ou les problèmes de surfaces libres rencontrés dans le contrôle, sans paroi, de la forme d'équilibre d'un volume métallique liquide.

Des travaux importants étaient déjà engagés dans cette voie à l'Institut de Mécanique de Grenoble qui furent exposés à ce colloque, comme le confinement électromagnétique, l'action des champs magnétiques glissants ou tournants sur les métaux liquides (10) ou le brassage électromagnétique en creuset (11). L'intérêt naissant alors est allé grandissant et s'est concrétisé à l'échelle nationale en 1978 par la création du Groupement d'Intérêt Scientifique MADYLAM (Magnétodynamique des Liquides. Applications à la Métallurgie) soutenue par le C.N.R.S., Le Ministère des Universités et le Ministère de l'Industrie. Sur le plan international il s'est manifesté par une demande de conférences générales sur les applications métallurgiques de la M.H.D. avec champs magnétiques alternatifs (12) (13).

Notre travail est parfaitement centré sur ce thème dont il oublie volontairement les aspects relatifs au brassage asynchrone produit par les champs magnétiques monophasés dans les creusets chauffés par induction (14), pour ne retenir que les problèmes posés par la présence de champs magnétiques alternatifs imposés au voisinage de la surface libre d'un domaine métallique liquide. L'interaction forte entre les applications métallurgiques et les études théoriques donne une teinture assez particulière à ce travail qui se concrétise non seulement par des publications scientifiques mais également par des brevets de dispositifs exploitant les effets électromagnétiques induits dans un métal liquide pour améliorer ou remplacer les techniques traditionnelles.

Dans la première partie de ce mémoire sont développés les aspects essentiels du contrôle des surfaces libres à l'aide de champs magnétiques alternatifs de configurations convenablement choisies, susceptibles de faire apparaître dans un domaine métallique liquide des forces capables de substituer

leur action à celle des parois. Les possibilités d'imposer de façon stable une section droite circulaire, cruciforme ou allongée sous forme d'une lame de faible épaisseur, à une veine métallique libre sont analysées et démontrées expérimentalement. Une application particulière de l'action de champs magnétiques mobiles engendrés par des inducteurs à aimants permanents est également exposée qui permet de résoudre un problème délicat posé dans l'élaboration en coulée continue d'ébauches métalliques creuses.

Le confinement électromagnétique qui, par le contrôle de la section droite d'un jet de métal liquide, réalise un véritable robinet électromagnétique sans paroi fait l'objet de la deuxième partie.

Dans une troisième partie sont analysés les critères de stabilité des surfaces libres contrôlées par des champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée.

Dans la dernière partie est traitée une question tout à fait étrangère aux préoccupations des trois premières. Loin des problèmes de contrôle électromagnétique des surfaces libres à l'aide de champs alternatifs, elle est centrée sur l'une des questions demeurées encore très ouvertes dans le domaine de la M.H.D. avec champ magnétique continu. Il s'agit, dans le cadre des divers problèmes de turbulence M.H.D., d'une tentative théorique pour comprendre comment s'exerce l'influence d'un champ magnétique uniforme et permanent sur une turbulence homogène rendue stationnaire par une injection d'énergie. La technique utilisée, le Groupe de Renormalisation, était exploitée avec un réel succès dans l'analyse des transitions de phase et des phénomènes critiques (15) et venait d'être transposée à l'étude des propriétés de la turbulence à grande échelle (16). Etant donné l'effort important engagé par notre équipe sur la turbulence M.H.D. aussi bien sur le plan expérimental que sur le plan théorique, il est apparu nécessaire d'investir dans cette voie nouvelle. Ma contribution personnelle à cette étude, qui demandait pendant une durée limitée un labeur approfondi, témoigne des collaborations qui existent au sein d'une équipe comme la nôtre.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) ALFVEN H.  
    *"The existence of electromagnetic - hydrodynamic waves"*  
    Nature, 150, 405-6, (1942)
- (2) LEORAT J. - POUQUET A. - FRISCH U.  
    *"Turbulence m.H.D. développée et génération de champs magnétiques"*  
    Congrès de la Société Française de Physique - Toulouse (1979)
- (3) FARADAY H.  
    *"Induced e.m.f.s. and currents in moving liquids"*  
    Phil. Trans. Roy. Soc. - 163 (1832)
- (4) HARTMANN J.  
    *"Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid  
    in a homogeneous magnetic field"*  
    Math. Phys. Med. - 15 - 6 (1937)
- (5) SHERCLIFF J.A.  
    *"Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse  
    magnetic fields"*  
    J. Fluid Mech. - 1 - 644 (1956)
- (6) COWLING T.G.  
    *"The magnetic field on sunspots"*  
    Monthly Notices Roy. Astro. Soc. London - 94 - 39 (1933)
- (7) ALFVEN H.  
    *"Cosmical electrodynamics"*  
    Cambridge Monographs on Mech. and Applied Math. (1958)
- (8) MOFFATT H.K.  
    *"M.H.D. phenomena in rotating fluids"*  
    Report on NATO Advanced Study Institute. J. Fluid Mech. - 57 - 625  
    (1973)

- (9) HUNT J.C.R. - MOREAU R.  
*"Liquid-metal magnetohydrodynamics with strong magnetic fields :  
a report on Euromech 70"*  
J. Fluid Mech. - 78 - 261 (1976)
- (10) ALEMANY A. - MOREAU R.  
*"Ecoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un  
champ magnétique tournant"*  
J. Mécanique
- (11) KHALETSKY D.  
*"Etude théorique du brassage électromagnétique dans les fours à induc-  
tion. Application à l'analyse d'un procédé de séparation électro-  
magnétique"*  
Thèse de 3ème Cycle - U.S.M.G. - I.N.P.G. (1976)
- (12) MOREAU R.  
*"M.H.D. Flows driven by alternating magnetic field"*  
Proc. of the 2<sup>nd</sup> Bat Sheva Seminar, Israël (1978)
- (13) MOREAU R.  
*"Applications métallurgiques de la Magnetohydrodynamique"*  
Proc. of the 15<sup>th</sup> IUTAM - Toronto (1980)
- (14) FAUTRELLE Y.  
*"Analytical and numerical aspects of the electromagnetic stirring  
induced by alternating magnetic fields"*  
J. Fluid Mech. - 102 - 405 (1981)
- (15) WILSON K.G. - KOGUT J.  
*"The renormalization group and the  $\mathcal{E}$  expansion"*  
Physics Reports (Physics Letters C) - 12 - 2 (1974)
- (16) FORSTER D. - NELSON D.R. - STEPHEN H.J.  
*"Long time tails and the large eddy behaviour of a randomly  
stirred fluid"*  
Physics letters B - 11 (1975)



CHAPITRE I

LE CONTROLE DE FORME

-----

## CHAPITRE I

### LE CONTRÔLE DE FORME

-----

#### 1. Position du problème

Le problème posé par le contrôle, à l'aide de champs magnétiques alternatifs, de la forme et de la position de la surface libre d'un milieu métallique liquide peut se formuler de deux façons :

Tout d'abord le problème "inverse", c'est à dire tel que le formulerait l'utilisateur éventuel d'un procédé électromagnétique permettant de substituer son action à celles des parois : étant donné un domaine métallique liquide de volume fixé, quelles sont les caractéristiques du champ magnétique à produire, et par conséquent celles de l'inducteur à réaliser, qui permettent d'imposer à la surface extérieure du domaine une géométrie précise, fixée par avance. Dans le cas d'une géométrie tridimensionnelle les difficultés posées par la détermination du champ magnétique à partir de l'équilibre, connu en tout point de l'interface, entre les forces électromagnétiques, assimilables en première approximation ( $O(R_\omega^{-1/2})$ ) à une pression, les forces de tension superficielle, la gravité ou les forces d'inertie semblent difficilement surmontables. Il n'existe à notre connaissance qu'une réalisation illustrant une solution de ce problème dans un cas tridimensionnel : il s'agit de la lévitation d'un volume d'aluminium liquide, sous la forme d'une sphère, obtenue par SAGARDIA (1974) (1). Ce sont des considérations intuitives, fortement étayées par une théorie, recherchant avant tout les critères de stabilité du domaine liquide lévité, qui ont permis de définir les caractéristiques géométriques et électriques de l'inducteur capable de fournir en chaque point de la surface du liquide des forces capables d'équilibrer la gravité. Dans une géométrie essentiellement bidimensionnelle, il existe des solutions à ce problème, dans certains cas particuliers, que nous développons dans les paragraphes suivants.

Le problème "direct", ensuite, qui consiste à déterminer la géométrie d'équilibre d'un domaine métallique liquide de volume fixé lorsqu'il est soumis

au champ magnétique engendré par un inducteur de configuration géométrique et de caractéristiques électriques données. En géométrie tridimensionnelle les mêmes difficultés que dans le cas du problème direct apparaissent. Aucune méthode analytique ne semble pouvoir permettre d'atteindre le résultat souhaité ; seules des méthodes numériques avec processus itératifs pourraient permettre d'obtenir la solution du problème posé. Cependant ces méthodes ne doivent pas exploiter la recherche d'équilibres locaux de l'interface mais être basées sur l'utilisation de principes variationnels, comme il est fait dans certains cas en géométrie bidimensionnelle (SNEYD, MOFFATT (1981) (2), BRANCHER, SERO GUILLAUME (1981) (3)). Avec certaines hypothèses restrictives, ce problème reçoit cependant des solutions analytiques en géométrie bidimensionnelle (SHERCLIFF 1980) (4).

De façon commune à ces deux problèmes, se pose la question de la stabilité de la forme de l'interface contrôlée par le champ magnétique (stabilité locale) et de la stabilité de la position du volume de métal liquide (stabilité globale) qu'il est indispensable d'assurer.

## 2. Le problème inverse

Nous nous limitons au cas de la géométrie bidimensionnelle. Même dans une telle géométrie, la prise en compte de la diffusion du champ magnétique dans le métal liquide, par l'existence d'une épaisseur de peau non nulle, rend le problème généralement insoluble sauf dans des cas très particuliers comme le contrôle d'une surface libre plane horizontale ou celui d'une surface cylindrique circulaire d'axe vertical (5).

L'hypothèse d'une épaisseur de peau nulle permet de poser le problème mathématiquement de façon simple. Puisque le champ magnétique ne pénètre pas dans le métal liquide, la surface libre est une surface de champ. L'équilibre local permet de déterminer, en tout point de la surface d'équation connue, la pression magnétique et donc la valeur de la composante tangentielle du champ magnétique. Celui-ci, harmonique dans tout l'espace entourant le domaine métallique liquide, possédant une composante tangentielle connue et une composante normale nulle, en tout point de la surface libre, nul à l'infini, peut être théoriquement déterminé par son potentiel vecteur, qui se réduit à une fonction



de courant. Celle-ci est nécessairement singulière en un nombre fini ou infini de points : c'est la détermination de la position de ces singularités, isolées ou réparties, et de leur nature qui permet de définir l'inducteur géométriquement et électriquement. Une simplification de la géométrie d'étude peut être introduite par l'utilisation des transformations conformes qui est légitime à cause du caractère harmonique du champ magnétique : l'extérieur du domaine métallique, dans son ensemble, ou pour fraction seulement dans le cas où il existe des symétries, peut se transformer en un demi-plan dans l'espace d'une variable complexe reliée à la variable physique. La transformation de Schwarz-Christoffel généralisée, par exemple, qui assimile la surface libre inconnue à un polygone de côtés infiniment petits en nombre infini, permet d'obtenir ce résultat. Il n'existe pas, à notre connaissance, d'exemples où le problème posé de cette façon ait été résolu.

Si, toutefois, il semble que le problème posé puisse être résolu dans le cas où aucune attention n'est accordée à la stabilité de la surface libre considérée, les chances de trouver une solution, dans le cas où des conditions sont imposées sur ce point, deviennent pratiquement nulles par des voies purement mathématiques. Ceci est tout à fait clair en ce qui concerne le contrôle d'une surface libre horizontale. Posé mathématiquement, le problème conduit de façon très simple à la solution, ne présentant aucune singularité à distance finie, d'un champ magnétique alternatif uniforme parallèle à la surface libre considérée. Un tel champ magnétique ne peut cependant pas assurer la stabilité de l'équilibre souhaité. En ce qui concerne l'équilibre local de la surface libre, les perturbations associées à des vecteurs d'onde perpendiculaires au champ magnétique appliqué peuvent se développer en toute liberté sans subir aucun effet d'amortissement de la part du champ magnétique (cf. chapitre III). Pour ce qui est de la stabilité globale du domaine métallique aucun effet favorable du champ magnétique ne peut être espéré. L'équilibre, considérant une surface libre infinie, est indifférent pour toute translation de l'interface parallèlement à elle-même. Ainsi un champ magnétique alternatif uniforme, qui répond mathématiquement aux conditions imposées par le contrôle d'une surface libre horizontale, ne fournit pas de solution physiquement acceptable. L'exigence imposée par la stabilité conduit à des champs magnétiques de configurations beaucoup plus complexes.

La stabilité globale de l'équilibre ne peut être assurée que si la géométrie du champ est telle qu'elle puisse faire apparaître, au sein du métal liquide, des forces de rappel capables de ramener, en cas d'écart, la surface libre dans sa position initiale. De telles forces ne peuvent exister que si le champ magnétique est fortement croissant à partir de l'interface. A cause du caractère harmonique du champ magnétique, un gradient normal à la surface libre n'apparaît que s'il est forcé au niveau de l'inducteur lui-même : l'échelle caractéristique de variation spatiale du champ magnétique dans le milieu isolant est l'échelle caractéristique de l'enroulement inducteur (lorsque celui-ci est conçu pour interdire l'uniformité du champ magnétique, c'est à dire présentant des courants électriques en opposition de phase dans deux conducteurs voisins). Cependant, ce gradient, souhaité dans une direction, existe obligatoirement dans la direction perpendiculaire, c'est à dire parallèlement à l'interface : il en résulte donc une variation de la pression magnétique à la surface du métal liquide qui ne peut être maintenue plane et qui adopte une configuration périodique de même longueur d'onde que l'inducteur. Cette configuration est connue sous le nom de "Picket Fence" dans le cas des plasmas (6) .

Pour rendre compatible l'existence de forces de rappel et de surfaces libres stables de géométrie plane, il faut user d'artifices reposant sur le fait que le métal liquide ne peut répondre à des sollicitations pulsant à fréquence élevée, à cause de son inertie et de sa viscosité. Ainsi en utilisant les champs magnétiques caractérisés plus haut, en leur imposant de plus d'être mobiles, il est possible d'obtenir un phénomène de lissage de la pression magnétique dont le liquide électroconducteur ne ressent que la partie moyenne. Une telle possibilité est exploitée pour contrôler des surfaces libres cylindriques circulaires (cf. page 29 "Confinement, centrage et guidage électromagnétique d'un jet de métal liquide") (7) comme des surfaces libres planes maintenues en équilibre à l'encontre des forces de pesanteur (*GARNIER (1978)*, *BIASSE (1981)* (8) (9)) (cf. annexe "Procédé et dispositif électromagnétique pour faciliter la soudure"). Il est à noter que dans ces deux types de géométrie une simplification importante apparaît puisque la tension superficielle peut être négligée : d'effet nul dans le cas d'une surface plane, elle conduit à une pression uniforme dans le cas d'une surface circulaire.

Les champs magnétiques mobiles présentent, relativement aux effets qu'ils induisent dans le métal liquide, une particularité qui permet non seulement de déduire la forme d'équilibre de la surface libre qu'ils contrôlent, mais aussi, les caractéristiques du champ de vitesse et du champ de pression qu'ils engendrent dans le liquide, même dans le cas d'une profondeur de pénétration non nulle (MOFFATT 1978) (10). Ce caractère spécifique apparaît en géométrie bidimensionnelle, comme le montre l'analyse suivante.

Soit un repère local, attaché à la surface supposée cylindrique du métal liquide, définissant les coordonnées  $x$  et  $y$  respectivement normale et tangentielle. Les champs magnétiques mobiles considérés sont la superposition de plusieurs champs magnétiques élémentaires qui s'écrivent sous la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}(x) e^{i\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \omega t + ky$$

$\omega$  étant la pulsation du champ magnétique de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  et de vitesse de déplacement  $V_C = \omega/k$ . Il est à noter que malgré l'interaction non linéaire des divers champs magnétiques appliqués introduite par la force de Laplace, la superposition demeure au niveau des effets mécaniques produits pourvu que les pulsations des divers champs magnétiques soient, comme les différences entre deux pulsations quelconques, suffisamment élevées (cf. Chapitre III) (BIASSE 1981) (11). Puisque le champ magnétique est bidimensionnel, le potentiel vecteur  $A$  dont il dérive n'a qu'une seule composante non nulle, de plus il est affecté de la même variation spatiale et temporelle que le courant inducteur :

$\vec{A} = (0, 0, f(x)e^{i\alpha})$  où  $f$  est une fonction complexe. Le champ magnétique  $\vec{B}$  et les courants induits qui en résultent dans le milieu conducteur s'écrivent :

$$\vec{B} = (i k f e^{i\alpha}, -f' e^{i\alpha}, 0)$$

$$\vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (0, 0, -i \sigma \omega f e^{i\alpha})$$

où  $f'$  désigne  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $f$  vérifie, à cause du mécanisme de diffusion qui régit  $\vec{B}$  :

$$f'' = i \mu \sigma \omega f$$

La force de Laplace  $\vec{F}$  qui en résulte prend la forme :

$$\vec{F} = \frac{1}{4} (\vec{J} + \vec{J}^*) \wedge (\vec{B} + \vec{B}^*)$$

si  $f^*$  désigne la fonction complexe conjuguée de  $f$ , soit :

$$\vec{F} = \frac{i\sigma\omega}{4} \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (f^2 e^{2i\alpha} - f^{*2} e^{-2i\alpha}) + (f^* f' - f'^* f) \\ - ik(f^2 e^{2i\alpha} + f^{*2} e^{-2i\alpha}) + 2i k f f^* \\ 0 \end{cases}$$

qui peut encore s'écrire :

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_i$$

avec :

$$\vec{F}_i = - \frac{i\sigma\omega}{2} \text{grad} (f^2 e^{2i\alpha} - f^{*2} e^{-2i\alpha})$$

$$\vec{F}_r = \sigma \omega \left[ i (f^* f' - f'^* f), - 2 k f f^*, 0 \right]$$

Ainsi de tels champs magnétiques mobiles donnent naissance à des forces dont la partie rotationnelle, indépendante du temps, engendre dans le métal liquide un écoulement permanent résultant de la source de vorticit   :

$$\vec{\Omega} = \text{Rot } \vec{F} = \left[ 0, 0, \frac{\sigma\omega k}{2} \frac{\partial}{\partial x} (f f^*) \right]$$

De plus la pulsation  $\omega$  du champ magnétique appliqué étant choisie suffisamment grande pour que le métal ne puisse répondre aux sollicitations pulsant à  $2\omega$ , seule la partie moyenne des forces a une influence sur le liquide. Ce point est important : en effet, puisque le (ou les) champ magnétique appliqué se présente sous forme d'une onde mobile, il est impossible de dissocier la périodicité spatiale de la périodicité temporelle. Ainsi moyenner dans le temps revient à moyenner dans l'espace et toute périodicité spatiale échappe au métal liquide.

Cette particularité tient à deux conditions :

- la configuration bidimensionnelle
- l'association de la périodicité spatiale avec la périodicité temporelle sous forme d'une onde progressive.

Le phénomène de lissage, vis à vis de la périodicité spatiale imposée par le champ magnétique, se produit donc. Le contrôle stable des surfaces libres est ainsi possible, avec des champs magnétiques dont les caractéristiques sont fort éloignées de celles des champs magnétiques alternatifs uniformes.

### 3. Le problème direct

La résolution de ce problème procède d'une démarche classique, par comparaison avec le cas précédent : les conditions aux limites sur le champ magnétique sont parfaitement connues, au niveau de l'inducteur de caractéristiques fixées, à l'infini et à la surface libre dont l'équation est à déterminer. Il est toujours possible de résoudre le problème expérimentalement : l'expérience à faire est tout à fait claire. Ceci constitue un avantage très important vis à vis du problème inverse pour lequel, l'imagination et l'intuition peuvent seules préciser les conditions expérimentales qui ne présentent jamais le même caractère d'unicité. La difficulté de résolution mathématique est plus ou moins importante suivant la nature de l'équilibre régissant la forme de la surface libre : elle va croissante depuis le cas magnétostatique pur, jusqu'à celui où est prise en compte l'influence du mouvement induit dans le métal liquide, en passant par l'introduction de contraintes extérieures imposées par exemple par la tension superficielle ou la gravité.

Dans le cas magnétostatique pur, en géométrie bidimensionnelle, sans pénétration du champ magnétique dans le milieu conducteur, les transformations conformes conduisent à des solutions analytiques. La condition à la frontière libre se prête à ce genre de traitement puisqu'elle traduit la constance de la pression magnétique  $B^2/2\mu$ , donc la constance de  $B$ . Le problème posé est tout à fait analogue à celui de la détermination de l'équation des lignes de jet en

hydrodynamique, obtenue grâce à l'utilisation de méthodes hodographiques (12). La configuration dans l'espace physique où la position et la nature des singularités (inducteur) est connue et la forme de la surface libre inconnue peut être transposée dans un espace où la forme de la surface libre est connue et la position des singularités initialement inconnue. La relation de correspondance entre les coordonnées spatiales des deux espaces permet de localiser ces singularités, ce qui par transformation inverse et retour à l'espace physique conduit à la forme de la surface libre (SHERCLIFF (1979) (4).

L'introduction de la tension superficielle rend la condition aux limites à la surface libre plus complexe puisqu'elle impose une relation entre le champ magnétique et le rayon de courbure local. Si l'exploitation des transformations conformes permet une simplification de la géométrie, elle ne peut conduire à l'équation de la surface libre qui n'est obtenue que par mise en oeuvre de méthodes numériques itératives (SHERCLIFF 1981) (12) .

Ces diverses études sont au centre des travaux de Jacqueline ETAY qui a fait la démonstration expérimentale des possibilités de contrôle électromagnétique des surfaces libres. Les résultats obtenus, dont quelques exemples sont illustrés dans "Le contrôle électromagnétique des surfaces métalliques liquides et ses applications" (cf. page 59 ) feront l'objet de sa thèse de Docteur-Ingénieur (Juin 1982).

En ce qui concerne les applications industrielles, quatre brevets ont été déposés qui concernent des procédés nouveaux fondés sur l'ensemble de ce travail (9) (13) (14) (15) :

- "Procédé et dispositif pour faciliter la soudure"
- Procédé et dispositif de type électromagnétique pour le formage des métaux"
- Procédé et dispositif électromagnétiques d'élaboration de rubans et de tôles métalliques de faible épaisseur"
- Procédé et dispositif pour diriger, en l'absence de parois, des veines métalliques liquides, notamment pour les centrer, les guider ou contrôler leur forme circulaire".



4. Une application particulière des champs magnétiques mobiles au contrôle de la forme d'une surface libre à l'encontre des forces de pesanteur.

Position du problème

La coulée continue centrifuge est une technique d'élaboration d'ébauches creuses destinées à la fabrication de tubes, utilisée par la Société VALLOUREC (16). Le procédé actuel consiste à alimenter en continu une lingotière annulaire en cuivre formée de deux cylindres coaxiaux refroidis. L'ensemble de ces deux cylindres est mis en rotation ( $\sim 1$  tour/seconde) ; le cylindre intérieur est de plus animé d'un mouvement oscillatoire de faible amplitude pour éviter toute adhérence du métal au cours de la solidification. La rotation présente un certain nombre d'avantages : le plus intéressant réside dans la formation d'une surface libre parabolique qui permet de rassembler le laitier, surmontant le métal fondu, au voisinage du mandrin central (fig. 1). Ceci permet d'éviter tout entraînement de laitier entre la lingotière extérieure et le métal en cours de solidification et d'assurer à l'ébauche une "peau" extérieure sans défaut. Malheureusement le laitier rassemblé autour du mandrin intérieur peut être convecté par le métal, et la peau intérieure, très délicate à rectifier par la suite, est de mauvaise qualité. Le problème de contrôle de forme posé est alors le suivant : imaginer et réaliser un dispositif électromagnétique permettant de faire remonter le métal liquide au voisinage du mandrin central de façon à créer, entre les deux cylindres, une dépression sur la surface libre où le laitier puisse se rassembler loin des cylindres intérieur et extérieur de façon à assurer une peau de bonne qualité sur toute l'ébauche métallique (fig. 2). Les conditions imposées sont l'absence de contact entre la surface libre et une paroi quelconque, l'obligation de loger le dispositif en question à l'intérieur du mandrin de cuivre, l'interdiction de véhiculer des courants importants ou de faire apparaître des différences de potentiel élevées à proximité du métal liquide.

Solution apportée

L'idée de base consiste à exploiter l'effet d'un champ magnétique glissant dans la direction axiale du mandrin capable de communiquer une vitesse ascensionnelle du métal liquide. L'effet produit est double : d'une part la remontée de la surface libre au voisinage du mandrin central (par simple

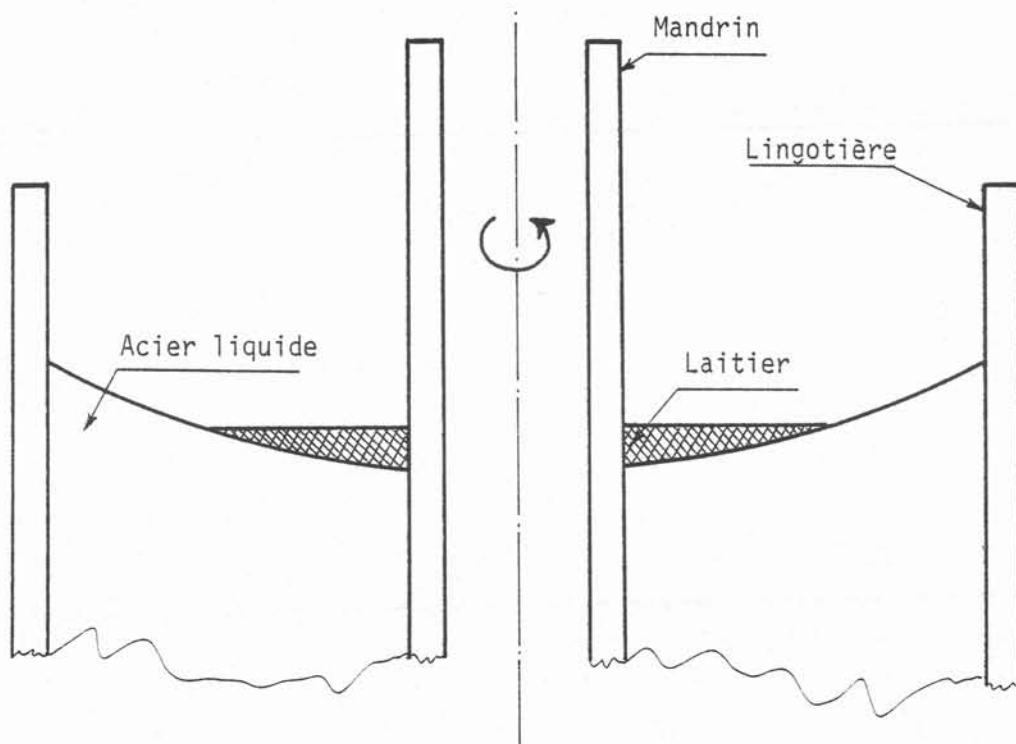


Figure 1

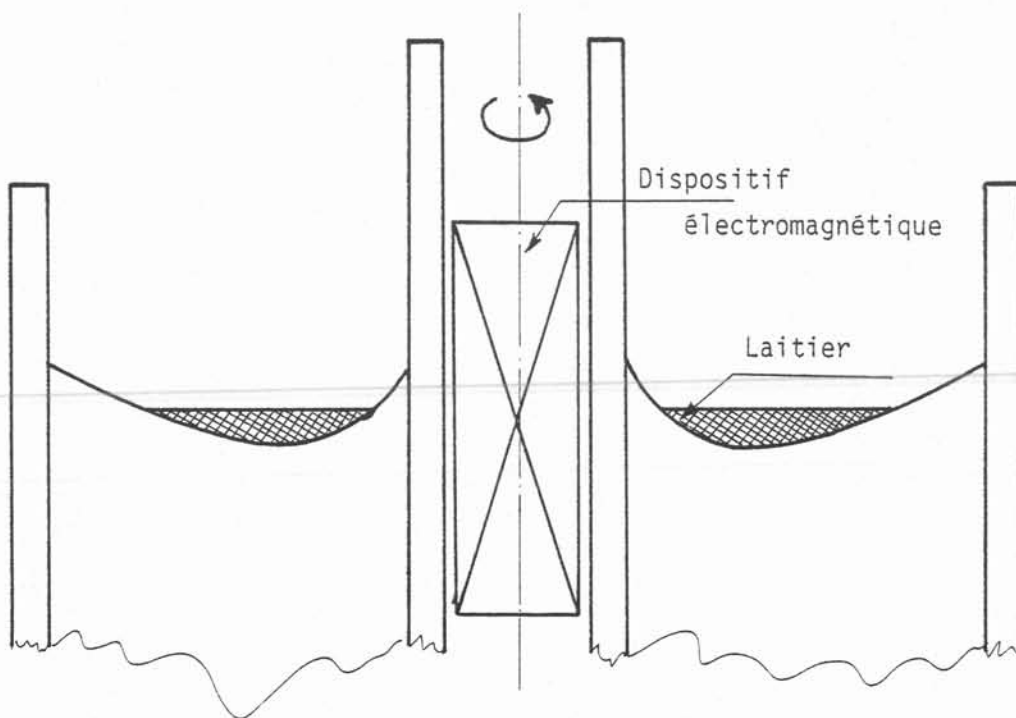


Figure 2



transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle) est assurée ; d'autre part le courant ascendant créé dans le liquide permet de ramener en surface les inclusions qui auraient été éventuellement convectées par le métal et de les piéger dans le laitier. La contrainte sévère éliminant toute possibilité d'utilisation de courants électriques d'intensité élevée a conduit à imaginer une solution utilisant des aimants permanents.

Un cylindre d'acier doux, mobile autour de son axe confondu avec l'axe du mandrin central est logé à l'intérieur de ce dernier. Ce cylindre comporte, sur sa surface latérale, deux hélices aimantées de polarités différentes (fig. 3 ). Lorsque le cylindre est mis en rotation, un observateur immobile voit un champ magnétique mobile ayant une composante azimutale tournante et une composante verticale ascendante ou descendante suivant le sens de rotation du cylindre. Pour échapper aux variations de flux, dont il est le siège lorsque le cylindre tourne, le métal liquide tend à se déplacer à la même vitesse que le champ magnétique : il acquiert donc, au voisinage du mandrin central, un mouvement vertical et un mouvement de rotation. Ce dernier inutile, voire gênant, peut être éliminé par mise en rotation inverse de la lingotière extérieure.

Le mandrin intérieur en cuivre constitue, à cause de l'effet de peau, un écran pour le champ magnétique. Aussi la vitesse de rotation  $\omega$  du cylindre doit-elle être suffisamment faible pour que le mandrin soit perméable au champ magnétique ; soit si  $e$  désigne l'épaisseur du mandrin de conductivité électrique  $\sigma$ :

$$\mu \sigma \omega e^2 \leq 1 \quad (\delta \geq e)$$

La vitesse de glissement du champ magnétique est égale à :

$$V_s = \omega \lambda / 2\pi$$

si  $\lambda$  désigne la longueur d'onde du champ magnétique, c'est à dire le pas des hélices aimantées. Pour avoir un effet moteur important, il est bon d'augmenter  $V_s$ , ce qui conduit à accroître  $\lambda$  puisque  $\omega$  est limitée supérieurement à cause de la présence du mandrin de cuivre. Cependant pour un cylindre de rayon

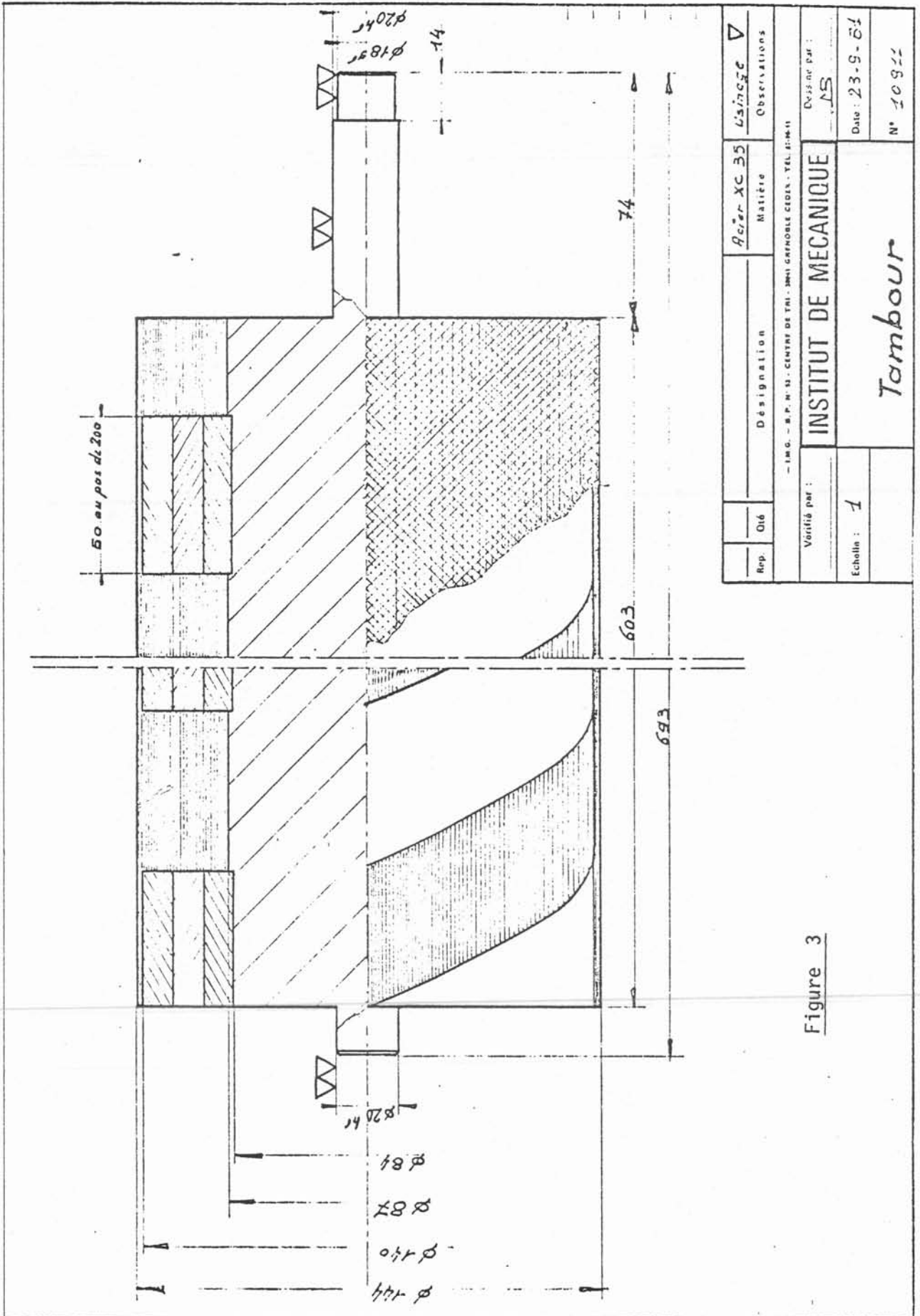


Figure 3

donné, augmenter  $\lambda$  revient à accroître l'angle d'inclinaison des hélices par rapport à la direction horizontale et donc à favoriser la composante tournante du champ magnétique, aux dépens de sa composante verticale glissante. Un compromis existe donc qui conduit à un optimum pour  $\lambda$ .

Le calcul du champ magnétique, loin de la surface libre du métal liquide, dans une géométrie axisymétrique où le mécanisme dominant est une diffusion bidirectionnelle, est aisé. Il est semblable à celui exposé dans (7) qui conduit très simplement à une décomposition entre partie rotationnelle et partie irrotationnelle des forces induites dans le liquide et à la détermination des caractéristiques du champ de vitesse dans cette région.

Le problème de frontière libre posé ici est très complexe puisque l'équation de la surface libre résulte d'un équilibre entre les forces électromagnétiques, les forces d'inertie, les forces de gravité et les forces de tension superficielles. De plus, la présence au niveau de la surface libre des trois milieux de conductivités électriques différentes (l'atmosphère isolant, le métal liquide, le mandrin de cuivre) rend les difficultés de résolution analytique du problème délicates à surmonter.

L'expression du maximum  $V$  de la vitesse axiale du métal liquide est donné par :

$$\frac{V}{V_s} = \frac{\beta}{1+\beta}$$

avec

$$\beta = \frac{B_o'^2 \sigma}{\rho \nu k^2} \frac{1}{4\sqrt{1+\alpha^2} (1 + \sqrt{1+\alpha^2})}$$

$B_o'$  amplitude du champ magnétique à la frontière du métal liquide

$\sigma$  conductivité électrique du métal liquide

$\rho$  masse volumique du métal liquide

$\nu$  viscosité du métal liquide

$k = 2\pi/\lambda$  nombre d'onde associé au champ magnétique

$\alpha = \mu\sigma\omega/k^2$  paramètre d'écran construit avec la vitesse de rotation  $\omega$  du cylindre inducteur

L'écoulement produit dans le métal liquide est fortement turbulent et la viscosité moléculaire  $\nu$ , non pertinente, doit être remplacée par une viscosité turbulente déterminée par les expériences.

Un prototype expérimental a été dimensionné et réalisé qui est représenté sur la photo 1. La photo 2 montre quelques types de rotors munis d'hélices en caoutchouc aimanté que nous avons expérimentés. Ils diffèrent les uns des autres par la qualité et l'épaisseur des bandes aimantées utilisées. Le métal de simulation utilisé est le mercure. Le rotor est entraîné en rotation, à des vitesses pouvant atteindre 3000 t/mn, à l'aide d'un moteur de 800 W. L'effet produit est illustré sur la photo 3. Les vitesses de recirculation obtenues dans le mercure sont de 25 cm/s et la remontée de la surface libre par rapport à la position plane initiale est de 6 mm pour une vitesse de rotation du rotor aimanté de 3000 tours/mn. Ceci correspond à une viscosité turbulente de  $27510^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

La description détaillée du prototype de laboratoire et les résultats expérimentaux figurent dans le rapport final du contrat signé entre VALLOUREC et MADYLAM (17). Le dispositif et son adaptation à une installation industrielle de coulée continue ont fait l'objet de deux brevets (18) (19) :

*"Procédé de fabrication de barres creuses par coulée continue à l'aide d'un champ magnétique et dispositif de mise en oeuvre du procédé".*

*et "Rotor magnétique pour la fabrication de corps creux par coulée continue".*

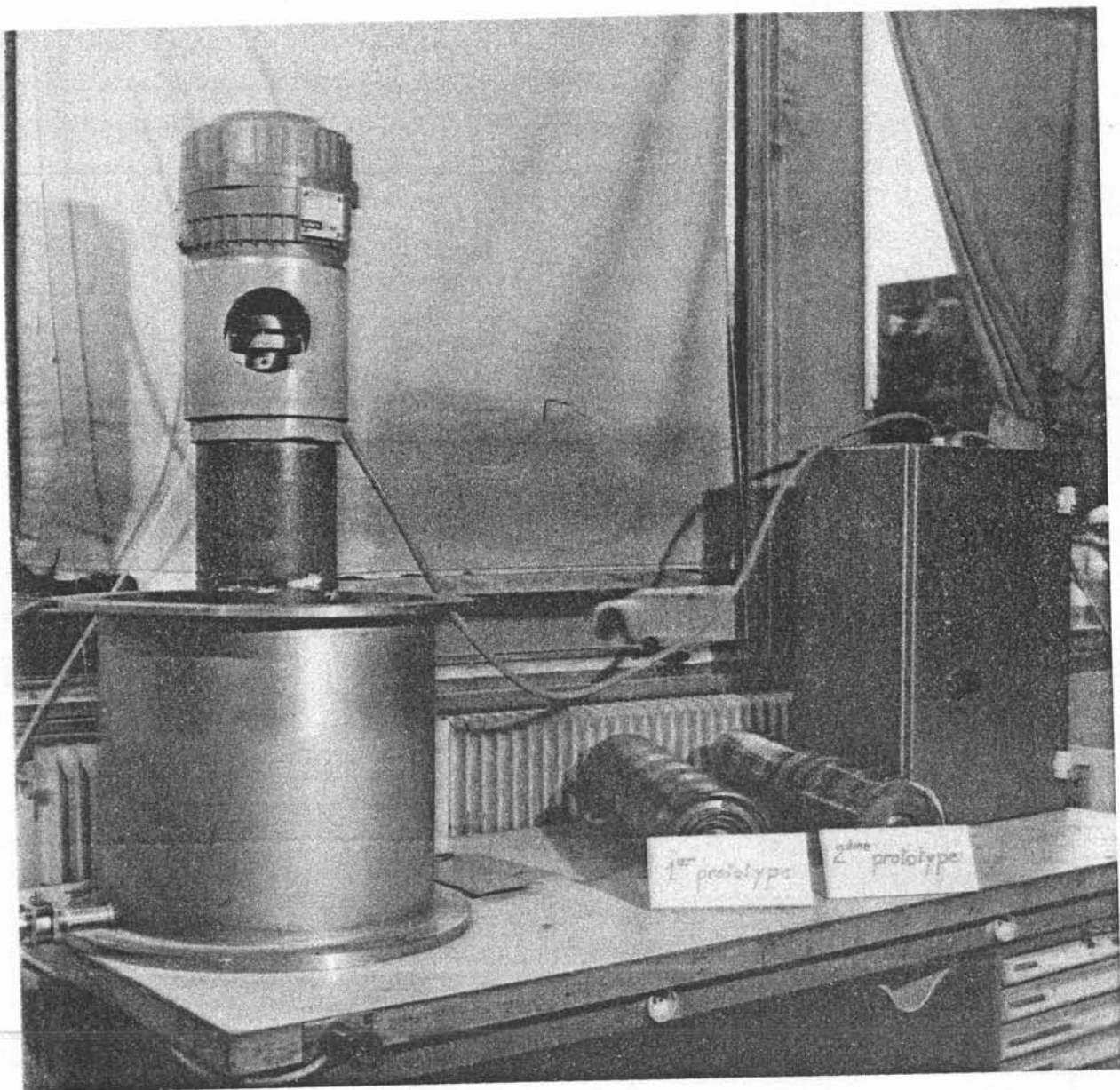
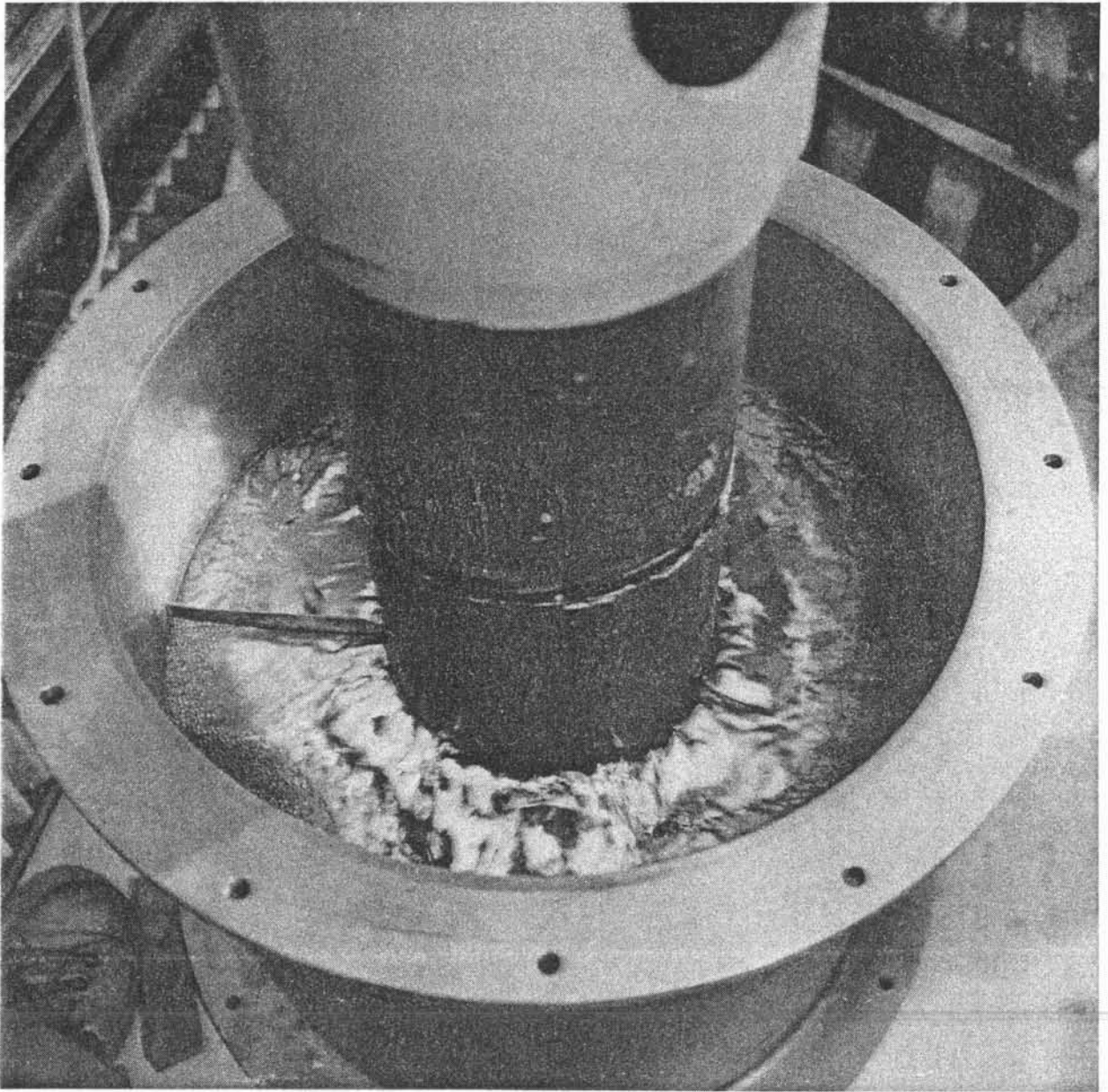


PHOTO 1





PHOTO 2



P H O T O   3

---

*Journal de Mécanique appliquée,*  
Vol. 3, N° 3, 1979.

## **Confinement, centrage et guidage électromagnétiques d'un jet de métal liquide**

*Electromagnetic confining, centering  
and guiding of liquid metals*

par

**M. GARNIER\***

---

**RÉSUMÉ.** — Cette étude illustre la possibilité de supprimer totalement les parois habituellement nécessaires pour réaliser les opérations de centrage et de guidage d'une veine de métal liquide ou pour maintenir la forme circulaire de sa section, en leur substituant l'action de champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée. Des considérations intuitives sur les effets induits par de tels champs dans un métal liquide amènent à utiliser la configuration du « trou de potentiel » tournant pour assurer les fonctions souhaitées. Une justification théorique est donnée par l'analyse des champs de pression et de vitesse engendrés dans le métal liquide par des « trous de potentiel » tournant de façon continue ou réversible.

**ABSTRACT.** — This study illustrates how to suppress the walls usually necessary to center and to guide a molten metal flow or to maintain the circular shape of its section, by substituting to them the action of high frequency magnetic fields. Some intuitive considerations about the effects induced in a liquid metal by such fields lead to use the configuration of a rotating quadrupole field to achieve the desired functions. A theoretical justification is given with the analysis of the pressure and velocity fields generated by quadrupole fields rotating in a continuous or in a reversible way.

### **1. Introduction**

Dans les techniques traditionnelles de fonderie, le contact entre le métal fondu et les parois destinées à le contenir, à le mettre en forme ou à le guider, est à l'origine de nombreuses difficultés technologiques qui limitent la productivité des installations industrielles, et conduisent à une augmentation

---

\* Institut de Mécanique de Grenoble, B. P. n° 53, Centre de Tri, 38041 Grenoble Cedex.



du prix de revient des produits élaborés. Ce contact produit, en effet, une double pollution du métal liquide à partir des parois :

- une pollution chimique, tout d'abord, due à une réaction entre le métal et les matériaux réfractaires constituant les parois, souvent favorisée par l'érosion et l'entraînement dans la masse métallique de fragments de ces matériaux;

- une pollution physique du métal dont les qualités mécaniques se trouvent amoindries dans les régions qui se trouvaient proches des parois lors de la coulée.

Il en résulte que le lingot brut de coulée n'est pas directement utilisable. En particulier, il doit subir, le plus souvent, l'opération très coûteuse du « scalpage » qui consiste à éliminer la couche superficielle de métal qui a souffert du contact métal-paroi. En outre l'érosion physicochimique opérée par le métal sur les parois réfractaires, constituant par exemple les busettes de coulée, conduit non seulement à limiter les vitesses de coulée, mais aussi à remplacer fréquemment, généralement après chaque coulée, ces busettes d'un prix très élevé.

Actuellement un effort particulier est entrepris en métallurgie pour tenter de résoudre ce délicat problème. La solution magnétohydrodynamique, qui consiste à éliminer purement et simplement les parois en leur substituant un système de forces d'origine électromagnétique équivalent, est sans nul doute la solution la plus élégante et surtout la plus absolue. Getslev et coll. [1] ont fourni les premiers en 1966 la preuve concrète de la possibilité de remplacer les parois par un système adapté de forces électromagnétiques avec la mise au point d'un dispositif de coulée continue de l'aluminium dans lequel la lingotière traditionnelle est totalement supprimée et remplacée par les lignes de force d'un champ magnétique alternatif. De même Okress et coll. [2] et Sagardia [3] parviennent à soustraire à l'action de la pesanteur une masse importante de métal liquide en réalisant un « creuset » électromagnétique sans parois. Parallèlement Garnier et Moreau [4] confinent au moyen d'un champ magnétique une veine de métal liquide dont il est possible de faire varier à volonté le diamètre ou le débit.

Les possibilités d'application de la magnétodynamique des liquides avec champs magnétiques alternatifs dépassent très largement le cadre de ces quelques exemples. Il est très facile, en effet, d'engendrer des forces au sein même d'un métal liquide en utilisant des champs magnétiques non permanents : tout métal liquide situé à proximité d'un inducteur, voire d'un simple conducteur, parcouru par un courant électrique alternatif est le siège

de variations de flux importantes et par conséquent se trouve parcouru par des courants de Foucault qui s'opposent à ces variations de flux. Ces courants électriques interagissent avec le champ magnétique créé par l'inducteur et donnent naissance à des forces dans chaque élément de volume du fluide conducteur : de l'énergie peut alors être transférée de l'inducteur dans le métal liquide sans qu'il soit nécessaire d'établir un contact entre eux. Le problème consiste alors à imaginer, pour chaque cas particulier, pour chaque application, la forme des inducteurs qui donneront aux champs magnétiques et aux courants induits les caractéristiques indispensables pour engendrer les forces électromagnétiques produisant en tout point du métal liquide l'effet mécanique désiré.

Dans ce contexte, nous nous proposons de démontrer la possibilité de réaliser, grâce à l'utilisation de champs magnétiques alternatifs, les opérations de centrage, de guidage et de correction de forme d'une veine de métal liquide en évitant toujours le contact entre le métal et une quelconque paroi [5]. La première partie de notre étude consiste en un examen qualitatif des effets mécaniques produits par un champ magnétique de fréquence élevée sur un écoulement de métal liquide. La notion de « trou de potentiel » y est introduite qui définit un champ magnétique dont la configuration est très voisine de la configuration optimale relativement aux fonctions à assurer. Cependant le champ magnétique associé à un trou de potentiel possède nécessairement des singularités qui ne permettent pas de créer sur toute la périphérie de la veine de métal liquide le système de forces uniforme indispensable au maintien de la forme circulaire de la section métallique. Il n'est pas possible d'éliminer ces singularités et il faut avoir recours à un certain nombre d'artifices, basés sur l'utilisation combinée de plusieurs trous de potentiel alimentés séparément, pour que ces singularités, toujours présentes, deviennent imperceptibles au métal liquide. Une deuxième partie est consacrée à la justification théorique des résultats acquis de façon intuitive dans le premier paragraphe. L'analyse porte sur la détermination des effets produits dans une veine de métal liquide en mouvement par plusieurs trous de potentiel associés dans le but de faire tourner la configuration du champ magnétique de façon continue ou de façon réversible. Dans le premier cas, il est montré que la veine de métal liquide se trouve animée d'une rotation en masse; cependant, le glissement, écart relatif entre la vitesse de rotation du champ magnétique et du métal liquide est très important. La pression résultant du mouvement du fluide et de la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques est telle que le seul équilibre possible correspond à une veine métallique de section droite parfaitement circulaire. Dans le cas d'une

rotation réversible du champ magnétique, la rotation en masse du métal liquide disparaît au profit de cellules de recirculation bien individualisées, dans lesquelles la vitesse du fluide est extrêmement faible. Le calcul de la pression au sein du métal conduit également à la conclusion que seule la section droite de forme circulaire correspond à un juste équilibre entre les diverses sollicitations présentes dans le fluide conducteur. Le dernier paragraphe regroupe, en conclusion, quelques remarques de portée générale.

## 2. Les « trous de potentiel » et leur réalisation

Tout liquide électroconducteur soumis à un champ magnétique alternatif est le siège de courants électriques induits de géométrie semblable et de phase opposée à celle des courants inducteurs générateurs du champ magnétique. Si la fréquence de ce champ est élevée, les courants induits ne peuvent exister qu'à la périphérie du domaine liquide. Dans cette « peau » superficielle, qui est d'autant plus mince que la fréquence est plus élevée, l'interaction des courants induits et du champ magnétique croisés donne naissance à des forces de Laplace toujours dirigées vers l'intérieur du milieu fluide. Le module de ces forces est proportionnel au carré de l'intensité du champ magnétique existant à la surface libre du métal liquide. C'est de ce résultat important que découle la possibilité de réaliser, sans l'aide d'aucune paroi, le centrage ou le guidage d'un écoulement métallique.

Pour contraindre une veine de métal liquide à ne pas s'écarter d'une position déterminée, il suffit de créer un système de forces de rappel qui tendent à la ramener dans la position choisie lorsqu'elle s'en éloigne, c'est-à-dire un ensemble de forces centripètes dont le module est d'autant plus grand que l'on s'éloigne davantage de cette position. Cela revient, par conséquent, à réaliser un champ magnétique dont l'amplitude, et par suite le carré de l'amplitude, augmente fortement à partir d'une ligne singulière le long de laquelle il est minimal : tout déplacement qui aurait tendance à éloigner l'axe d'une veine métallique de cette ligne singulière serait alors fortement contrarié par l'action des forces électromagnétiques. Si cette ligne singulière est rectiligne, un centrage est réalisé. Pour obtenir un guidage, il suffit de donner à la ligne singulière la forme que l'on veut voir épouser par l'axe de la veine métallique. La région dans laquelle le champ magnétique croît fortement à partir d'une ligne singulière est appelée « trou de potentiel ».

## 2. 1. RÉALISATION DU TROU DE POTENTIEL ÉLÉMENTAIRE

Considérons le système formé de quatre conducteurs rectilignes disposés suivant les arêtes d'un prisme de base carrée et parcourus par des courants alternatifs de fréquence élevée en opposition de phase dans deux conducteurs successifs. Le champ magnétique (dont les lignes de forces sont représentées sur la figure 1) qui résulte de la présence de ces conducteurs est nul, par

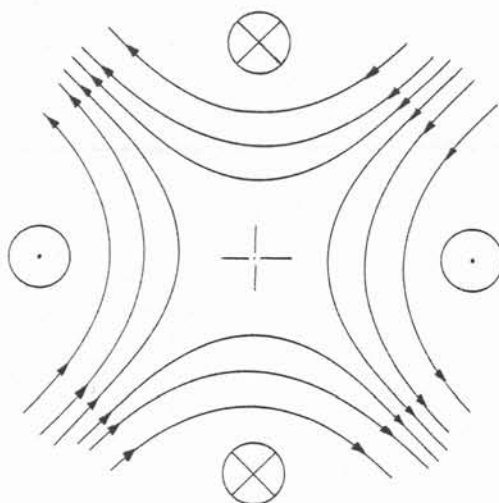


Fig. 1. — Configuration du champ magnétique dans un « trou de potentiel ».

Fig. 1. — Magnetic field configuration in a quadrupole.

symétrie, le long de l'axe du cylindre et croît fortement à mesure que l'on s'approche de l'un quelconque de ces conducteurs, donc que l'on s'éloigne de cette ligne singulière. Soit une veine de métal liquide s'écoulant à l'intérieur du trou de potentiel ainsi réalisé : si l'axe du domaine liquide ne correspond pas à celui du trou de potentiel, la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent dans la peau électromagnétique n'est pas nulle et tend à ramener les deux axes en coïncidence, réalisant ainsi le centrage désiré. Tout se passe comme si la veine métallique était prisonnière d'une enveloppe (la peau électromagnétique) s'opposant à tout déplacement et à toute déformation qui détruirait la symétrie par rapport à l'axe de trou de potentiel.

Cependant, il ressort clairement du simple examen de la configuration du champ magnétique engendré par les quatre conducteurs que la symétrie axiale imposée par le trou de potentiel ne peut pas être de révolution. En effet, en plus de l'axe du cylindre quatre autres lignes singulières correspondant à l'intersection de la surface libre du métal liquide avec les plans médiateurs des faces du prisme apparaissent à la périphérie de la veine métallique. Le long de ces lignes, les forces électromagnétiques ne peuvent, à cause de leur faiblesse relative, s'opposer à un éventuel déplacement du fluide. Il s'ensuit que dans l'état d'équilibre la veine métallique abandonne la forme cylindrique circulaire pour adopter une section cruciforme afin que sa surface libre coïncide avec les lignes d'égale valeur de  $B^2$ , si  $B$  désigne l'intensité locale du champ magnétique. Il est impossible de faire disparaître les singularités liées à la configuration du champ magnétique et responsables de la déformation non circulaire de la veine métallique. Cependant l'association de plusieurs trous de potentiel élémentaires, permet de créer un système de sollicitations tel qu'il soit perçu par le métal liquide comme un système parfaitement uniforme sur toute la périphérie du domaine fluide de section circulaire. Les trous de potentiel, dotés de rotation réversible ou non, ainsi constitués permettent de préserver la forme circulaire de l'écoulement métallique tout en assurant les fonctions de centrage et de guidage.

## 2.2. TROU DE POTENTIEL TOURNANT

L'association de quatre nouveaux conducteurs, semblables à ceux constituant le trou de potentiel élémentaire, dont ils se déduisent, géométriquement par une rotation de  $45^\circ$  autour de l'axe du cylindre initial et électriquement par un déphasage d'un quart de période permet la mise en rotation du trou de potentiel. Ceci a pour effet de substituer deux fois par période les régions où les forces de rappel sont maximales à celles où elles sont inexistantes (*fig. 2*). Compte tenu de l'inertie du fluide et de la fréquence élevée des courants inducteurs, l'excursion très rapide des lignes singulières à la surface du métal liquide revient à créer en tout point de cette surface une force de rappel constante en moyenne, susceptible de préserver la forme cylindrique circulaire de la section métallique. Ce dispositif permet non seulement de réaliser un centrage ou un guidage mais présente également l'avantage de pouvoir corriger, grâce au jeu des forces différentielles de ce système de rappel, les éventuels défauts de surface qui se présentent comme des écarts par rapport à la position circulaire centrée sur l'axe de rotation du

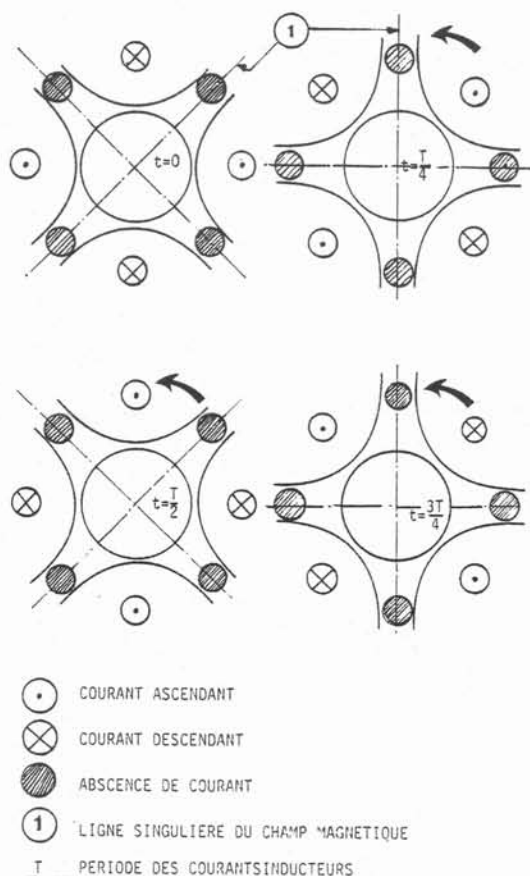


Fig. 2. — « Trou de potentiel » tournant.

Fig. 2. — Rotating quadrupole field.

trou de potentiel (fig. 3). Vis-à-vis des écoulements métalliques de faible vitesse axiale, le trou de potentiel tournant présente cependant un inconvénient puisqu'il peut engendrer un phénomène de mise en rotation du métal liquide qui se comporte comme un rotor dans le stator constitué par les huit conducteurs. Cet effet parasite peut être supprimé en réalisant un trou de potentiel à rotation réversible.

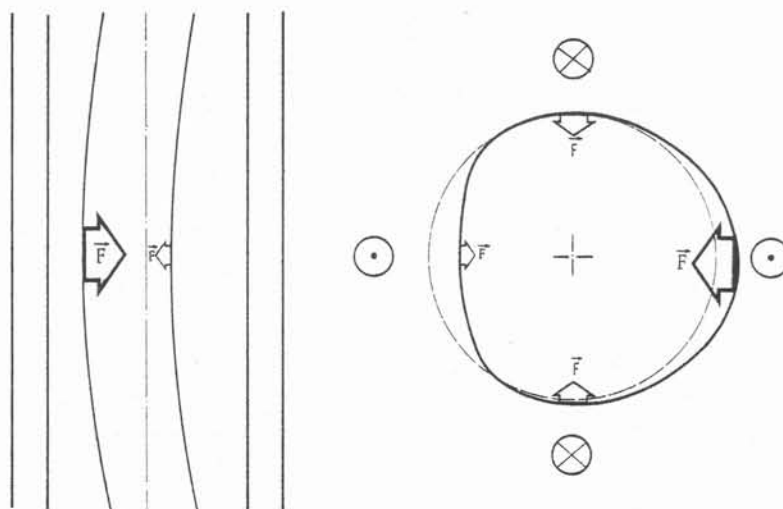


Fig. 3. — Action d'un « trou de potentiel » : (a) dans le cas d'une absence de centrage de la veine métallique; (b) dans le cas d'un manque de circularité de la section droite.

Fig. 3. — Effect of a quadrupole field: (a) upon a decentered liquid metal flow; (b) upon a non circular cross section.

### 2.3. TROU DE POTENTIEL A ROTATION RÉVERSIBLE

Imaginons que l'on inverse périodiquement le sens de rotation du trou de potentiel à une fréquence telle que le temps de maintien de la rotation dans un sens déterminé soit inférieur au temps indispensable à la mise en mouvement de la masse métallique. Il devient alors impossible au métal liquide de répondre aux sollicitations tangentielles pulsantes dont il ne perçoit que la moyenne nulle. La mise en rotation de la veine métallique ne peut donc plus se produire et cependant le déplacement, par rotation, des lignes singulières du champ magnétique demeure. Il est tout à fait possible de réaliser par des voies purement mécaniques l'inversion rapide du sens de rotation du champ magnétique en communiquant, par exemple, le mouvement désiré à l'inducteur d'un trou de potentiel élémentaire. Une telle solution entraîne obligatoirement une dépense d'énergie supplémentaire, l'existence de contacts électriques mobiles et bien entendu une durée de vie limitée au dispositif à cause de l'usure des pièces mobiles mises en jeu. Il est par

conséquent à la fois plus économique et plus élégant de s'orienter vers des solutions électromagnétiques susceptibles de produire un effet identique avec un inducteur parfaitement immobile. La rotation réversible de la configuration du champ magnétique peut être obtenue simplement en alimentant chacun des deux systèmes, utilisés pour créer un champ magnétique tournant, à des fréquences peu différentes  $f_1$  et  $f_2$  (avec par exemple  $f_2 > f_1$ ), les courants inducteurs ayant même amplitude. Dans un repère lié au champ magnétique de fréquence  $f_1$ , (fig. 4), nous voyons que la fréquence d'inversion du sens de rotation du champ est  $f_r = 2(f_2 - f_1) = 1/T_r$ .

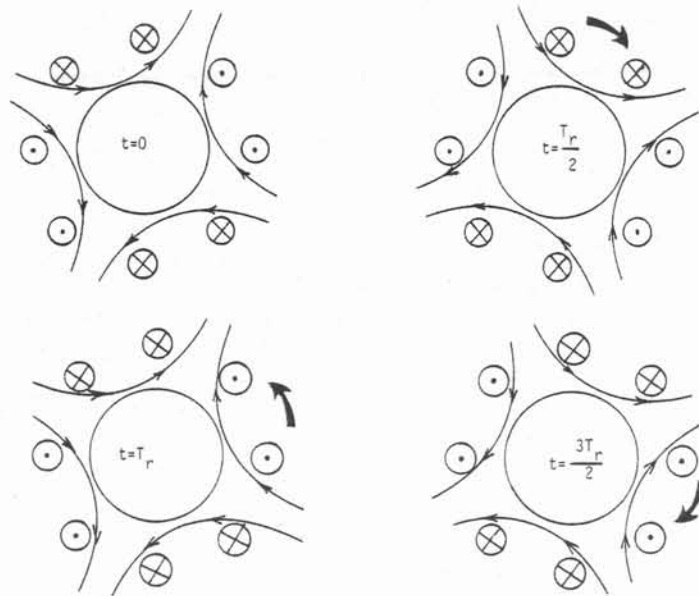


Fig. 4. - « Trou de potentiel » à rotation réversible.

Fig. 4. - *Quadrupole field rotating in a reversible way.*

Dans un tel repère,  $1/8$  de tour est effectué pendant le temps  $T_r/2$ . Par suite dans un repère fixe le nombre  $n$  de tours effectués dans un sens de rotation déterminé avant inversion est :

$$n = \frac{f_1 + f_2}{8(f_2 - f_1)}.$$



Un choix convenable des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  permet d'une part d'avoir un effet de peau fortement marqué, d'autre part de fixer la valeur de  $n$ . Par exemple, si les fréquences choisies sont  $f_1 = 15\,000$  Hz,  $f_2 = 25\,000$  Hz, la fréquence d'inversion  $f_r$  est  $20\,000$  Hz, le nombre de tours effectués entre chaque inversion est  $n = 1/2$  et l'épaisseur de peau  $\delta$  pour un acier courant, à l'état liquide, est de  $5$  mm ( $\delta = (\mu\sigma\omega)^{-1/2}$ , § 3).

Dans chacun des cas précédemment envisagés, le trou de potentiel initial est constitué de quatre conducteurs parallèles équidistants. Il est concevable que, pour des veines métalliques de diamètres importants, un tel système ne puisse remplir parfaitement les fonctions de centrage, de guidage ou de correction de forme, du fait de l'éloignement obligé des conducteurs. L'effet produit sur un jet initialement circulaire serait l'adoption d'une configuration voisine de celle des lignes de champ et donc l'évolution vers une section droite proche d'un carré dans le cas d'un système formé de quatre conducteurs et d'un octogone dans le cas de deux systèmes associés. Il est souhaitable alors de multiplier le nombre de conducteurs nécessaires à la réalisation du trou de potentiel : la seule condition à respecter est l'opposition de phase des courants dans deux conducteurs successifs. En outre, pour un système initial de  $2N$  conducteurs une rotation du trou de potentiel, réversible ou non peut être obtenue par l'association d'un système identique au premier, déduit de celui-ci par une rotation d'angle  $\pi/2$   $N$  autour de l'axe du trou de potentiel. L'alimentation déphasée ou de fréquence différente de ces systèmes permet d'obtenir la rotation des singularités du champ (*fig. 5*).

### 3. Détermination analytique des effets électromagnétiques produits dans un métal liquide par un trou de potentiel

Dans les installations expérimentales de laboratoire ou dans les installations industrielles utilisant les métaux fondus classiques, le nombre de Reynolds magnétique  $R_m : \mu\sigma VL$  reste toujours faible devant l'unité ( $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $V$ ,  $L$  désignent respectivement la perméabilité magnétique, la conductivité, une vitesse et une longueur typiques du métal liquide). Il en résulte que les courants induits par le mouvement des particules fluides à travers les lignes de champ sont très faibles et ne modifient pas de façon sensible le champ magnétique appliqué. Sur le plan analytique, ceci introduit une simplification importante puisque les équations électromagnétiques sont alors totalement découplées des équations hydrodynamiques et le champ magnétique peut être déterminé indépendamment du mouvement du fluide.

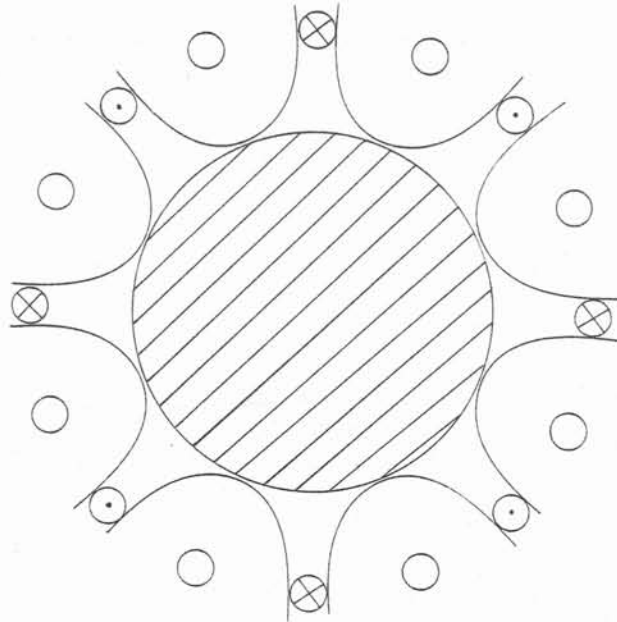


Fig. 5. — « Trou de potentiel » adapté au guidage ou au centrage d'une veine métallique de diamètre important.

*Fig. 5. — Multipole field used in the guiding or in the centering of large diameter liquid metal flow.*

Si le champ magnétique est non permanent (alternatif, tournant ou glissant) un nouveau paramètre  $R_\omega$  apparaît. Ce paramètre est construit comme un nombre de Reynolds magnétique dans lequel la vitesse caractéristique prise en compte est formée avec la pulsation  $\omega$  du champ magnétique et la longueur typique  $L$  de l'écoulement :

$$(1) \quad R_\omega = \mu \sigma \omega L^2.$$

Ce paramètre caractérise l'importance de l'effet de peau. On peut en effet l'interpréter comme le rapport  $L^2/\delta^2$  où  $\delta$  désigne la profondeur de pénétration du champ magnétique ( $\mu \sigma \omega \delta^2 \simeq 1$ ). Si  $R_\omega \gg 1$  les courants induits au voisinage de la surface du métal liquide sont assez forts pour annuler complètement l'influence des courants inducteurs et le champ magnétique; dans ce cas l'induction magnétique ne pénètre pas au-delà d'une

distance de l'ordre de  $\delta$ . Si  $R_m \ll 1$  le courant induit est très faible par rapport au courant inducteur et ne peut pas annuler l'induction magnétique sur une distance de l'ordre de  $L$ .

L'effet produit sur un écoulement de métal liquide par un champ magnétique tournant a été étudié par Alemany et Moreau [6] dans le cas où la fréquence des courants inducteurs est faible ( $R_m \ll 1$ ) et par Moffatt [7] dans le cas où celle-ci est grande ( $R_m \gg 1$ ). La première de ces deux études ne correspond pas au problème des trous de potentiel qui sont caractérisés, par nature, par des fréquences élevées ( $R_m \gg 1$ ). La seconde, qui se situe bien dans le domaine de fréquence envisagé, est limitée à une configuration électromagnétique bipolaire et à un écoulement en conduite. L'analyse de l'écoulement d'un jet de métal liquide en présence d'un trou de potentiel tournant (réversible ou non) demeure donc entièrement originale.

Dans toute sa généralité, le problème est complexe. En effet, nous avons souligné que la condition  $R_m \ll 1$  avait pour conséquence un découplage entre les équations du mouvement et les équations électromagnétiques. Il faut cependant préciser que ceci n'est vrai que lorsque les frontières du domaine fluide sont des parois solides indéformables. Cette simplification disparaît lorsque la frontière du métal liquide est une surface libre dont la position et la forme dépendent du champ magnétique, qui, lui-même, dépend de cette position et de cette forme par l'intermédiaire des conditions de continuité à travers la surface libre.

Notre approche va consister à oublier momentanément que cette frontière libre est inconnue et à la supposer au contraire fixée (comme si la veine de métal liquide était limitée par des parois). Nous montrerons *a posteriori* que la surface choisie pour résoudre le problème électromagnétique est bien celle qui vérifie la condition de surface libre. Les trous de potentiel tournants et les trous de potentiel à rotation réversible seront envisagés successivement.

### 3.1. EFFET PRODUIT PAR UN TROU DE POTENTIEL TOURNANT FORMÉ DE 2 $p$ CONDUCTEURS

La configuration que nous nous proposons d'étudier est la suivante :

- le métal liquide est entouré d'une atmosphère isolante dont il est séparé par une surface cylindrique circulaire de rayon intérieur  $a$ , coaxiale au trou de potentiel;
- cette atmosphère isolante contient 2  $p$  conducteurs équidistants parallèles à l'axe de la veine métallique;

- les  $2p$  conducteurs sont tangents extérieurement à un cylindre de rayon  $b > a$  coaxial à l'ensemble;
- un conducteur d'angle polaire  $\theta$ , ( $\theta = k(\pi/p)$ ;  $k \in \mathbb{N}$ ) est parcouru par un courant  $I = I_0 \cos(\omega t + p\theta)$  (fig. 6).

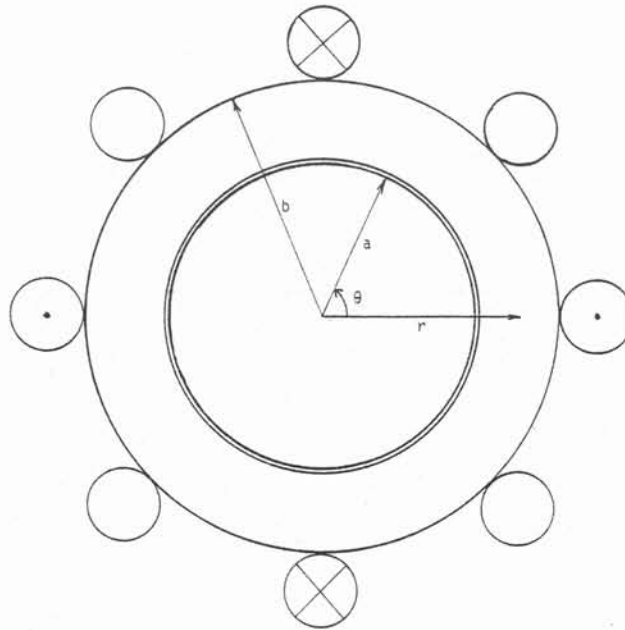


Fig. 6. - Définition de la géométrie d'étude.

Fig. 6. - Definition of the geometry of the problem.

Nous allons schématiser cette répartition discrète de conducteurs autour du cylindre de rayon  $b$  en la remplaçant par une répartition continue de conducteurs infiniment minces telle que l'intensité  $I$  du courant dans une génératrice du cylindre d'angle polaire  $\theta$  soit :

$$(2) \quad I = I_0 \cos(\omega t + p\theta).$$

La répartition du courant à la périphérie du cylindre de rayon  $b$ , et par conséquent le champ magnétique qui prend naissance à son voisinage immédiat, sont bien sûr différents de ceux relatifs au trou de potentiel initial. Cependant, dès que l'on s'éloigne de ce cylindre inducteur, le champ magnétique engendré par la distribution surfacique continue des courants devient très vite identique à celui créé par les  $2p$  conducteurs seuls, si bien

que pour la veine de métal liquide de rayon  $a < b$  les deux répartitions sont pratiquement équivalentes. L'un des intérêts de cette répartition continue réside dans la grande commodité introduite au niveau du traitement analytique du problème puisque la condition limite imposée au champ magnétique s'exprime simplement sous la forme :

$$(3) \quad r = b, \quad B = B_0 \cos(\omega t + p\theta).$$

Dans l'atmosphère isolante  $a \leq r \leq b$ , le champ magnétique solénoïdal et irrotationnel est harmonique :

$$(4) \quad \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad a \leq r \leq b.$$

Puisque la fréquence des courants inducteurs est élevée ( $R_\omega \gg 1$ ), c'est un mécanisme de diffusion pure qui régit le champ magnétique dans le métal liquide :

$$(5) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \text{Rot}(\text{Rot } \mathbf{B}), \quad r \leq a.$$

Compte tenu : de la valeur imposée de  $B_\theta$  pour  $r = b$ ; de la continuité de  $\mathbf{B}$  à la frontière des deux milieux ( $r = a$ ); de la valeur finie de  $\mathbf{B}$  au centre de la veine métallique; le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et son potentiel vecteur  $\mathbf{A} = (0, 0, A)$  sont donnés dans chacun des milieux par les expressions :

Milieu conducteur  $r \leq a$  :

$$(6) \quad \begin{cases} B_r = -2i \frac{B_0}{d} \frac{J_p(\alpha r)}{\alpha r} e^{i(\omega t + p\theta)}, \\ B_\theta = 2 \frac{B_0}{d} \frac{J'_p(\alpha r)}{p} e^{i(\omega t + p\theta)}, \\ A = -2 \frac{B_0}{d} \frac{J_p(\alpha r)}{p\alpha} e^{i(\omega t + p\theta)}. \end{cases}$$

Milieu isolant  $a \leq r \leq b$  :

$$(7) \quad \begin{cases} B_r = -i \frac{B_0}{d} \left[ \frac{J_p(\alpha a)}{\alpha a} \left( \frac{r^{p-1}}{a^{p-1}} + \frac{a^{p+1}}{r^{p+1}} \right) + \frac{J'_p(\alpha a)}{p} \left( \frac{r^{p-1}}{a^{p-1}} - \frac{a^{p+1}}{r^{p+1}} \right) \right] e^{i(\omega t + p\theta)}, \\ B_\theta = \frac{B_0}{d} \left[ \frac{J_p(\alpha a)}{\alpha a} \left( \frac{r^{p-1}}{a^{p-1}} - \frac{a^{p+1}}{r^{p+1}} \right) + \frac{J'_p(\alpha a)}{p} \left( \frac{r^{p-1}}{a^{p-1}} + \frac{a^{p+1}}{r^{p+1}} \right) \right] e^{i(\omega t + p\theta)}, \\ A = -\frac{B_0}{pd} \left[ \frac{J_p(\alpha a)}{\alpha a} \left( \frac{r^p}{a^{p-1}} + \frac{a^{p+1}}{r^p} \right) + \frac{J'_p(\alpha a)}{p} \left( \frac{r^p}{a^{p-1}} + \frac{a^{p+1}}{r^p} \right) \right] e^{i(\omega t + p\theta)}, \end{cases}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}; \quad B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r}; \quad \alpha a = \sqrt{\frac{R_\omega}{2}} (i-1); \quad R_\omega = \mu \sigma \omega a^2 \gg 1, \\ J_p = \text{fonction de Bessel d'ordre } p, \\ d = \frac{J_p(\alpha a)}{\alpha a} \left( \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}} - \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} \right) + \frac{J'_p(\alpha a)}{p} \left( \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}} \right). \end{array} \right.$$

Puisque nous sommes dans le cas précis où les fréquences élevées choisies donnent des valeurs élevées de  $R_\omega$  (donc de  $\alpha a$ ) et des épaisseurs de peau  $\delta$  tout à fait réduites ( $\delta/a \sim R_\omega^{-1/2}$ ), nous pouvons simplifier les expressions (6) en ne retenant que le comportement asymptotique des fonctions de Bessel. Celles-ci s'écrivent :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_p(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ J'_p(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right); \quad z \in \mathbb{C}, \quad \|z\| \ll 1. \end{array} \right.$$

Physiquement cette approximation est tout à fait claire. En effet la dimension caractéristique associée à la variation spatiale des grandeurs électromagnétiques est l'épaisseur de peau  $\delta$ , très faible devant le rayon  $a$  du cylindre électroconducteur. Par conséquent, à son échelle, le champ magnétique ne perçoit pas la courbure de la surface de séparation entre les milieux isolant et conducteur et il diffuse dans ce dernier milieu comme il le ferait à partir d'une surface plane. Au niveau analytique ceci se traduit naturellement par la substitution aux fonctions de Bessel, typiques de la géométrie cylindrique, des fonctions exponentielles adaptées à la diffusion en géométrie plane.

Quelle que soit la parité de  $p$ , les expressions (8) conduisent à la valeur suivante du potentiel vecteur  $A$  du champ magnétique :

$$(9) \quad A = \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{R_\omega/2}((r/a)-1)} \cos[\sqrt{R_\omega/2}((r/a)-1) + \omega t + p\theta - (\pi/4)]}{((a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1})) \sqrt{R_\omega}}.$$

Dans l'établissement de cette expression il a été tenu compte de la faible valeur de  $\delta$  devant  $a$  et les expressions de la forme  $(a/r) e^{\sqrt{R_\omega/2}((r/a)-1)}$  ont été remplacées par  $e^{\sqrt{R_\omega/2}((r/a)-1)}$ . Ceci est tout à fait légitime puisque la décroissance imposée par l'exponentielle est très forte et se manifeste bien avant que la croissance de la fonction  $a/r$  puisse apparaître.

Les deux conditions  $R_m \ll 1$  et  $R_o \gg 1$  impliquent que les courants induits dans le métal liquide résultent du caractère instationnaire du champ magnétique. La densité de courant  $j$  s'écrit donc :

$$(10) \quad j = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{avec } j = (0, 0, j),$$

ce qui conduit à

$$(11) \quad j = -\frac{2 B_0 R_o}{\mu_a ((a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1}))} \times e^{\sqrt{R_o/2}((r/a)-1)} \sin \left[ \sqrt{\frac{R_o}{2}} \left( \frac{r}{a} - 1 \right) + \omega t + p\theta - \frac{\pi}{4} \right].$$

Les forces électromagnétiques par unité de volume  $F = j \wedge B$  qui apparaissent dans le fluide conducteur s'en déduisent directement

$$(12) \quad F = \left( j \frac{\partial A}{\partial r}, \frac{1}{a} j \frac{\partial A}{\partial \theta}, 0 \right) = (F_r, F_\theta, 0),$$

$$(13) \quad \begin{cases} F_r = -\frac{B^2 a}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{2 R_o}} e^{\sqrt{2 R_o}((r/a)-1)} \\ \quad + \frac{B^2 a p}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{2 R_o}} e^{\sqrt{2 R_o}((r/a)-1)} (\cos 2\beta + \sin 2\beta), \\ F_\theta = -\frac{B^2 a p}{2\mu R_o} e^{\sqrt{2 R_o}((r/a)-1)} + \frac{B^2 a p}{2\mu R_o} e^{\sqrt{2 R_o}((r/a)-1)} \cos 2\beta, \end{cases}$$

où

$$B = \frac{2 B_0 \sqrt{R_o}}{a ((a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1}))}; \quad \beta = \sqrt{\frac{R_o}{2}} \left( \frac{r}{a} - 1 \right) + \omega t + p\theta - \frac{\pi}{4}.$$

Dans l'expression de  $F$ , nous avons séparé les parties moyennes  $\bar{F}$  et instationnaire  $f$ . Il est intéressant de remarquer que seule la partie moyenne de  $F$  est rotationnelle et peut engendrer un mouvement dans le fluide. Ce mouvement sera par conséquent permanent. La partie instationnaire  $f$  sera équilibrée par un gradient de pression qui aura par suite le même caractère instationnaire. Nous avons :

$$(14) \quad \text{Rot } F = \left( 0, 0, -\frac{4 p B^2 \sqrt{R_o}}{2\mu a^2} e^{\sqrt{2 R_o}((r/a)-1)} \right) = \text{Rot } \bar{F}.$$



$$(15) \quad \mathbf{f} = -\text{grad } \varphi,$$

avec

$$(16) \quad \varphi = \frac{B^2}{4\mu((a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1}))^2} \times e^{\sqrt{2R_\omega}((r/a)-1)} \cos \left[ \sqrt{2R_\omega} \left( \frac{r}{a} - 1 \right) + 2\omega t + 2p\theta \right].$$

Les forces électromagnétiques sont localisées dans une mince couche pariétale d'où seule, la viscosité peut faire diffuser le mouvement jusqu'au cœur de la veine de métal liquide. Autrement dit, le « moteur » de l'écoulement est confiné à la périphérie du domaine métallique liquide dans la peau électromagnétique. Par conséquent, si la fréquence des courants inducteurs, et par suite  $R_\omega$ , augmente, la zone d'efficacité de ce moteur devient très réduite de même que l'effet d'entraînement du métal par le champ magnétique tournant. A la limite, pour des fréquences infiniment grandes, le métal liquide se comporte comme un fluide parfaitement conducteur s'opposant à toute pénétration du champ magnétique dont l'effet est alors réduit à néant. Il est donc à prévoir que la vitesse radiale  $v$  communiquée au fluide sera inversement proportionnelle à  $R_\omega^n$  (avec  $n > 0$ ). Par contre, si pour une fréquence donnée, l'amplitude du champ magnétique, et donc le nombre de Hartmann  $M = B_0 a (\sigma/\rho\nu)^{1/2}$  s'accroît, l'efficacité du moteur augmente et l'on peut s'attendre à ce que  $v$  soit proportionnel à  $M^m$  (avec  $m > 0$ ). Ainsi, *a priori*, la composante orthoradiale de la vitesse du métal liquide peut être estimée de l'ordre de  $((M^m/R_\omega^n)\omega a)$ . Si le mouvement demeure, pour l'essentiel, limité au voisinage de l'épaisseur de peau (ceci signifie que  $\delta$  est l'échelle de longueur caractéristique de champ de vitesse), on peut préciser les exposants  $m$  et  $n$  en leur imposant de correspondre à un équilibre local des forces de viscosité et des forces électromagnétiques. On trouve alors  $m=2$ ,  $n=2$  de telle sorte que :

$$(17) \quad v \simeq \frac{M^2}{R_\omega^2} \omega a.$$

On peut expliciter complètement cette distribution de vitesse. Considérons l'équation du tourbillon qui, en négligeant les termes convectifs, s'écrit en termes de fonction de courant  $\psi$  :

$$(18) \quad \nu \nabla^4 \psi = - \frac{4 p B_0^2 \sqrt{R_\omega}}{\mu p \sqrt{2} a^2 ((a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1}))^2} e^{\sqrt{2R_\omega}((r/a)-1)}.$$

Le deuxième membre de cette équation, source de vorticité de l'écoulement, uniquement fonction de la coordonnée radiale, impose que la fonction de courant  $\psi$  ne présente qu'une variation dans cette seule direction. Or, puisque :

$$(19) \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

l'écoulement résultant est purement orthoradial  $V = (0, v(r), 0)$ . Il en résulte que les forces d'inertie, jusque-là considérées comme négligeables, sont rigoureusement nulles dans le métal liquide, à l'exception toutefois de la force associée à l'accélération centripète  $-v^2/r$  dont nous montrerons, plus loin, le rôle tout à fait négligeable.

La condition de non glissement à la paroi ( $r=a$ ), qui n'a de sens que dans la mesure où la surface de la veine est une vraie paroi, permet de déterminer  $v$  :

$$(20) \quad v = \frac{B_0^2 a p}{\mu p v R_w [(a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1})]^2} \left( e^{\sqrt{2 R_w} ((r/a)-1)} - \frac{r}{a} \right)$$

ou, en introduisant le nombre de Hartmann et le nombre adimensionnel  $R_\Omega = \mu \sigma \Omega a^2$  analogue à  $R_w$  mais formé avec la vitesse angulaire  $\Omega = \omega/p$  du champ magnétique appliquée :

$$(21) \quad v = \frac{M^2}{R_\Omega^2 d^2} \Omega a \left( e^{\sqrt{2 R_\Omega} ((r/a)-1)} - \frac{r}{a} \right) \quad \text{si} \quad d = \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}}.$$

Le cœur de la veine métallique est donc animé d'une rotation en masse de vitesse angulaire  $\Omega_c$  :

$$(22) \quad \Omega_c = - \frac{M^2}{R_\Omega^2 d^2} \Omega.$$

On pourrait penser, d'après l'expression (22), qu'il est possible en augmentant l'amplitude du champ magnétique appliqué ( $M$ ) d'accroître à volonté la vitesse angulaire du métal liquide, voire de dépasser la vitesse de synchronisme  $\Omega$ . Il n'en est rien. En effet la théorie développée ici repose sur l'hypothèse fondamentale que le mouvement du fluide, par l'intermédiaire des courants induits qu'il engendre, ne modifie pas le champ magnétique résultant de la diffusion dans le milieu conducteur du champ magnétique extérieur.

Ceci impose

$$(23) \quad R_m = \mu \sigma v a \ll 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\Omega_c}{\Omega} R_\Omega \ll 1$$

ou

$$(24) \quad \frac{M^2}{R_\Omega} \left( \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}} \right) \ll 1.$$

Cette condition fixe les limites, supérieure de l'intensité du champ magnétique appliqué et inférieure de la fréquence, au-delà desquelles les résultats déduits de cette analyse ne seraient plus valables.

Les équations permettant d'accéder au champ de pression se réduisent à :

$$(25) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (P + \varphi) = \frac{v^2}{r} + \frac{\bar{F}_r}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial}{\partial \theta} (P + \varphi) = \frac{\bar{F}_\theta}{\rho} + v \frac{\partial^e v}{\partial r^2} \equiv 0.$$

et conduisent à

$$(26) \quad \frac{1}{\rho} (P + \varphi) = \frac{M^4 p^2}{d^4 R_\omega^{9/2}} \frac{\omega^2 a^2}{2} \left[ \frac{e^{2\sqrt{2}R_\omega((r/a)-1)}}{2} - 2e^{\sqrt{2}R_\omega((r/a)-1)} \right] \\ + \frac{M^4}{2d^4 R_\omega^4} \omega^2 r^2 - \frac{N}{d^2 R_\omega} a^2 \omega^2 e^{\sqrt{2}R_\omega((r/a)-1)} + C,$$

où C est une constante vraie et où  $N = M^2/R_e = \sigma B_0^2/\rho\omega$  désigne le paramètre d'interaction.

A la périphérie du domaine liquide la pression est donnée par :

$$(27) \quad P = \left( -\frac{3M^4 p^2}{2d^4 R_\omega^{9/2}} + \frac{M^4 p^2}{2d^4 R_\omega^4} \right) \rho \omega^2 a^2 - \frac{N}{d^2} \rho \omega^2 a^2 \\ + \frac{N}{d^2 R_\omega} \rho \omega^2 a^2 \cos(2\omega t + 2p\theta) + C.$$

Les valeurs élevées de  $R_\omega$ , ainsi que la condition  $M^2/R_\Omega d^2 \ll 1$  permettent de négliger le premier terme d'origine inertielle devant le second d'origine électromagnétique, ce qui justifie l'équilibre initialement supposé et conduit à l'expression suivante pour la différence de pression entre les régions centrales de la veine liquide ( $r/a \ll 1$ ) et sa périphérie ( $r=a$ ) :

$$(28) \quad P(0) - P(a) = \frac{B_0^2}{\mu d^2} [-1 + \cos 2(\omega t + p\theta)].$$

Ainsi le champ magnétique a pour effet essentiel d'engendrer une surpression dans la majeure partie de la veine fluide. Celle-ci se compose de deux termes, l'un permanent, l'autre de moyenne nulle et pulsant à deux fois la fréquence des courants inducteurs. Cette fréquence étant très élevée ( $10^4$  Hz sont souvent nécessaires avec les métaux courants) le fluide ne peut pas, à cause de son inertie, suivre la pulsation de la pression (voir [6] pour la justification de cette affirmation); d'un point de vue mécanique, tout se passe comme s'il ne ressentait que la surpression moyenne :

$$(29) \quad \overline{P}(0) - \overline{P}(a) = \frac{B_0^2}{\mu d^2}.$$

Il ressort de cette expression que la surface extérieure du liquide est une surface isobare. Notre analyse, dans le but de s'affranchir des difficultés posées par la détermination de la position et de la forme d'une surface libre *a priori* inconnue, a supposé le fluide limité par une surface circulaire. Puisque cette surface extérieure du fluide est isobare, cette « pseudo-paroi » peut être supprimée sans que la forme de la veine de métal liquide ne soit perturbée. Notons que la présence d'une paroi réelle modifierait le champ de vitesse puisqu'elle imposerait l'existence d'une couche limite superficielle. Cependant grâce à la condition  $R_m \ll 1$ , ce champ de vitesse demeurerait sans effet sur la pression au sein du fluide. Il est donc tout à fait clair que la section circulaire est tout à fait cohérente avec le champ magnétique tournant envisagé. Il est également très clair que tout défaut de circularité (fig. 3) serait résorbé rapidement.

Le calcul de la vitesse, en l'absence de paroi, c'est-à-dire en imposant un frottement nul sur toute la périphérie du liquide au lieu de la condition de non glissement, conduit à :

$$(30) \quad v = \frac{M^2 p \sqrt{2}}{R_\omega^{3/2} d^2} \omega a \left( \frac{\sqrt{2}}{R_\omega^{1/2}} e^{\sqrt{2} R_\omega ((r/a)-1)} - \frac{2r}{a} \right).$$

Si l'on exclut le domaine tout à fait réduit correspondant à la peau électromagnétique, la veine métallique est tout entière animée d'une rotation en masse de vitesse angulaire  $\Omega_m$  :

$$(31) \quad \Omega_m = \frac{2\sqrt{2} p}{((a^{p+1}/b^{p+1}) + (b^{p-1}/a^{p-1}))^2} \frac{M^2}{R_\omega^{3/2}} \Omega.$$

Il s'ensuit finalement que les résultats de notre analyse sont valables dans la mesure où la condition suivante est réalisée :

$$(32) \quad 2\sqrt{2p} \frac{M^2}{R_\Omega^{1/2}} \left( \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}} \right)^{-2} \ll 1.$$

Ainsi, le trou de potentiel tournant, formé par l'association de  $2p$  conducteurs rectilignes parallèles, permet, par rotation des lignes de champ singulières existant à la surface du métal liquide, d'éviter la formation d'une section droite présentant des pointes. Il permet de conserver, si celle-ci existe déjà, ou sinon de rétablir, une section circulaire de même axe que lui. Les fonctions de centrage, de guidage et de correction de forme peuvent donc être assurées par un trou de potentiel tournant, avec cependant l'inconvénient d'une mise en rotation de la veine métallique liquide. En outre, il résulte du calcul qu'une surpression interne  $\Delta P$  apparaît au sein du liquide soumis au champ magnétique créé par l'inducteur du trou de potentiel tournant. Un tel inducteur associé à un écran de cuivre destiné à annuler brusquement cette surpression peut donc être substitué à l'inducteur du dispositif appelé « busette électromagnétique » [4] dont l'effet est de contracter une veine de métal liquide et de faire varier à volonté son débit. Centrage, guidage et rétablissement de la section circulaire de la veine métallique sont ainsi assurés avant la contraction. La valeur de la surpression induite dans le métal par le trou de potentiel est :

$$(33) \quad \Delta P = \frac{B^2}{2\mu} \left( \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}} + \frac{b^{p-1}}{a^{p-1}} \right)^{-2},$$

si  $B$  est la valeur efficace du champ magnétique. Cette valeur de  $\Delta P$  doit être substituée dans le chiffrage des performances de cette nouvelle busette électromagnétique à la valeur  $B^2/2\mu$  relative à la surpression induite par un solénoïde classique.

### 3.2. EFFET PRODUIT PAR UN TROU DE POTENTIEL À ROTATION RÉVERSIBLE

Le trou de potentiel ainsi défini doit permettre, comme nous l'avons déjà indiqué dans le paragraphe précédent, d'éviter la mise en rotation de la veine de métal liquide tout en préservant les fonctions de centrage, de guidage et de correction de forme. Il est difficile de limiter la vitesse de rotation communiquée au métal liquide par le trou de potentiel tournant : en effet il est important de conserver une fréquence élevée et, dans ce cas, diminuer la

vitesse de rotation nécessiterait de diminuer l'intensité  $B_0$  du champ magnétique ce qui conduirait naturellement à une baisse d'efficacité du trou de potentiel vis-à-vis de ses fonctions essentielles. En outre, une rotation semblable à celle engendrée par le trou de potentiel tournant présente peu d'intérêt pour les métallurgistes qui recherchent surtout des écoulements donnant lieu à des cisaillements susceptibles de casser les dendrites qui se forment lors de la solidification de la veine de métal. L'analyse suivante va montrer la capacité du trou de potentiel à rotation réversible à annuler la rotation en masse du métal liquide et à faire apparaître des écoulements cisailés au sein du liquide.

La géométrie retenue pour cette étude est identique à celle définie pour l'étude précédente. Nous pouvons dès à présent éliminer la paroi isolante de rayon  $a$ , qui, comme précédemment, se révèlera parfaitement inutile.

Nous envisageons à nouveau une distribution continue de conducteurs à la périphérie du cylindre de rayon  $b$ . Pour la veine de métal liquide, le champ magnétique créé par un trou de potentiel à rotation réversible constitué de huit conducteurs parallèles est identique à celui engendré par la répartition électrique continue suivante :

$$(34) \quad I = I_0 [\sin(2\theta + \omega_1 t) + \sin(2\theta - \omega_1 t) + \cos(2\theta + \omega_2 t) + \cos(2\theta - \omega_2 t)],$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  désignent les pulsations des courants inducteurs relatifs à chacun des deux trous de potentiel élémentaires formé de quatre conducteurs.

Cette répartition est la superposition de quatre systèmes électriques. A chacun d'eux, puis individuellement, est associé un champ magnétique d'amplitude  $B_0$  à la périphérie du cylindre de rayon  $b$  et par conséquent à un potentiel vecteur défini de la façon suivante dans le métal liquide :

$$(35) \quad \begin{aligned} I_1 &= I_0 \sin(2\theta + \omega_1 t), \\ A_1 &= - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{R_{\omega_1}/2}((r/a)-1)} \sin[\sqrt{R_{\omega_1}/2}((r/a)-1) + \omega_1 t + 2\theta - (\pi/4)]}{dR_{\omega_1}}, \\ I_2 &= I_0 \sin(2\theta - \omega_1 t) \end{aligned}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} A_2 &= - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{R_{\omega_1}/2}((r/a)-1)} \sin[-\sqrt{R_{\omega_1}/2}((r/a)-1) - \omega_1 t + 2\theta + (\pi/4)]}{dR_{\omega_1}}, \\ I_3 &= I_0 \cos(2\theta + \omega_2 t), \end{aligned}$$

$$(37) \quad A_3 = - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{R_{\omega_1}/2} ((r/a)-1)} \cos [\sqrt{R_{\omega_1}/2} ((r/a)-1) + \omega_2 t + 2 \theta - (\pi/4)]}{d R_{\omega_1}},$$

$$I_4 = I_0 \cos (2 \theta - \omega_2 t),$$

$$(38) \quad A_4 = - \frac{2 B_0 a e^{\sqrt{R_{\omega_2}/2} ((r/a)-1)} \cos [-\sqrt{R_{\omega_2}/2} ((r/a)-1) - \omega_2 t + 2 \theta + (\pi/4)]}{d R_{\omega_2}},$$

avec :

$$R_{\omega_j} = \mu \sigma \omega_j a^2 \ll 1, \quad d = \frac{a^3}{b^3} + \frac{b}{a},$$

Ces diverses expressions sont obtenues à partir des mêmes équations et avec les mêmes approximations que dans l'étude précédente.

Les équations électromagnétiques étant parfaitement linéaires le potentiel vecteur  $A$  résultant de la superposition des quatre systèmes électriques sera donné par la somme algébrique des quatre potentiels vecteurs élémentaires :

$$(39) \quad A = \sum_{j=1}^4 A_j.$$

Soit :

$$(40) \quad A = -2 C (\gamma_1 \cos \beta_1 \cos 2 \theta + \gamma_2 \cos \beta_2 \cos 2 \theta)$$

et

$$(41) \quad j = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{2 C}{\mu a^2} [R_{\omega_1} \gamma_1 \sin \beta_1 \sin 2 \theta + R_{\omega_2} \gamma_2 \sin \beta_2 \cos 2 \theta]$$

avec :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{2 B_0 a}{((a^3/b^3) + (b/a))}, \quad \gamma_j = e^{\sqrt{R_{\omega_j}/2} ((r/a)-1)} \sqrt{R_{\omega_j}}, \\ \beta_j = \sqrt{\frac{R_{\omega_j}}{2}} ((r/a)-1) + \omega_j t - \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

Les composantes des forces électromagnétiques qui apparaissent par unité de volume de métal liquide sont données par les expressions suivantes dans lesquelles nous avons distingué les parties moyennes  $\overline{F_r}$  et  $\overline{F_\theta}$  et les parties instationnaires  $f_r$  et  $f_\theta$  :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{F_r} = \frac{8 B_0^2}{\mu a ((a^3/b^3) + (b/1)^2 \sqrt{2})} [\sqrt{R_{\omega_1}} \sin^2 2 \theta e^{\sqrt{2 R_{\omega_1}} ((r/a)-1)} \\ \quad + \sqrt{R_{\omega_2}} \cos^2 2 \theta e^{\sqrt{2 R_{\omega_2}} ((r/a)-1)}], \\ \overline{F_\theta} = 0, \end{array} \right.$$



$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} f_r &= \frac{2\sqrt{2} B_0^2}{\mu a ((a^3/b^3) + (b/a))^2} \{ R_{\omega_1}^{3/2} \gamma_1^2 \sin^2 2\theta (\sin 2\beta_1 + \cos 2\beta_1) \\ &\quad + R_{\omega_2}^{3/2} \gamma_2^2 \cos^2 2\theta (\sin 2\beta_2 + \cos 2\beta_2) \\ &\quad + (R_{\omega_1} R_{\omega_2})^{1/2} \gamma_1 \gamma_2 \cos 4\theta [R_{\omega_1}^{1/2} \sin \beta_1 (\cos \beta_2 - \sin \beta_2) \\ &\quad \quad \quad + R_{\omega_2}^{1/2} \sin \beta_2 (\cos \beta_1 - \sin \beta_1)] \}, \\ f_\theta &= \frac{8 B_0^2}{\mu a ((a^3/b^3) + (b/a))^2} \left[ (R_{\omega_1} \gamma_1^2 \sin 2\beta_1 - R_{\omega_2} \gamma_2^2 \sin 2\beta_2) \sin 4\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{4} (R_{\omega_1} \sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos^2 2\theta - R_{\omega_2} \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin^2 2\theta) \right]. \end{aligned} \right.$$

Un premier résultat de ce calcul est la nullité de la partie moyenne de la composante orthoradiale de la force électromagnétique  $\overline{F_\theta}$ , principale responsable de l'éventuelle mise en rotation du métal liquide. La partie moyenne de la composante radiale  $\overline{F_r}$  présente quant à elle une variation suivant  $\theta$  ce qui lui confère un caractère rotationnel et introduit une source de vorticité dans le fluide. Cependant la périodicité en  $\theta$  exclut totalement la possibilité d'une rotation globale de la veine métallique, au profit de la formation de cellules individualisées, de même périodicité que  $\overline{F_r}$ .

Comme dans le problème précédent, les valeurs élevées des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  font que le métal liquide ne peut répondre aux sollicitations de pulsations  $2\omega_1$  et  $2\omega_2$ ; il ne perçoit, en fait, que la partie moyenne des forces électromagnétiques. Les vitesses induites dans la veine métallique seront à nouveau très faibles; sans aucun doute plus faibles que dans le cas du trou de potentiel tournant, à cause de la périodicité spatiale des forces motrices. Par conséquent, il est encore légitime de négliger les forces d'inertie devant les forces électromagnétiques et les forces de frottement visqueux.

La fonction de courant  $\psi$  est alors déterminée par l'équation du tourbillon, qui s'écrit :

$$(45) \quad \nabla^4 \psi = \frac{8\sqrt{2} B_0^2}{\rho \mu a^2 ((a^3/b^3) + (b/a))^2} \times [\sqrt{R_{\omega_1}} e^{\sqrt{2} R_{\omega_1} ((r/a)-1)} - \sqrt{R_{\omega_2}} e^{\sqrt{2} R_{\omega_2} ((r/a)-1)}] \sin 4\theta$$

et par conditions aux limites qui fixent :

- la nullité de la vitesse en  $r=a$  dans le cas d'une veine métallique contenue par une paroi;

— la nullité du frottement et de la composante radiale de la vitesse en  $r = a$ , dans le cas d'une veine libre.

Soit, en présence d'une paroi :

$$(46) \quad \psi = \frac{2\sqrt{2}}{((a^3/b^3) + (b/a))^2} \frac{M^2}{R_\omega^2} \omega a^2 \\ \times \left[ \frac{e^{\sqrt{2R_{\omega_1}}((r/a)-1)}}{R_{\omega_1}^{3/2}} - \frac{e^{\sqrt{2R_{\omega_2}}((r/a)-1)}}{R_{\omega_2}^{3/2}} + \left( \frac{1}{R_{\omega_1}} - \frac{1}{R_{\omega_2}} \right) \left( \frac{r^4}{\sqrt{2}a^4} - \frac{r^6}{\sqrt{2}a^6} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{R_{\omega_1}^{3/2}} - \frac{1}{R_{\omega_2}^{3/2}} \right) \left( \frac{2r^6}{a^6} - \frac{2r^4}{a^4} \right) \right] \sin 4\theta,$$

en l'absence de paroi :

$$(47) \quad \psi = \frac{2\sqrt{2}}{((a^3/b^3) + (b/a))^2} \frac{M^2}{R_\omega^2} \omega a^2 \\ \times \left[ \frac{e^{\sqrt{2R_{\omega_1}}((r/a)-1)}}{R_{\omega_1}^{3/2}} - \frac{e^{\sqrt{2R_{\omega_2}}((r/a)-1)}}{R_{\omega_2}^{3/2}} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{R_{\omega_1}^{3/2}} - \frac{1}{R_{\omega_2}^{3/2}} - \frac{1}{R_{\omega_1}^{3/2}} \right) \left( \frac{5r^4}{a^4} - \frac{2r^6}{a^6} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \left( \frac{1}{R_{\omega_1}^{1/2}} - \frac{1}{R_{\omega_2}^{1/2}} \right) \left( \frac{r^6}{a^6} - \frac{r^4}{a^4} \right) \right] \sin 4\theta$$

si

$$R_\omega = \mu \sigma \omega a^2; \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Dans chacun des deux cas l'écoulement est constitué de cellules indépendantes localisées dans des secteurs d'angle au centre  $\pi/4$ . La vitesse tangentielle à la surface d'une veine de métal libre est égale à :

$$(48) \quad v(a) = - \frac{4\sqrt{2}}{9((a^3/b^3) + (b/a))^2} \frac{\varepsilon M^2}{R_\omega^{7/2}} \sin 4\theta.$$

avec

$$\varepsilon = \frac{R_{\omega_1} - R_{\omega_2}}{2}.$$

Compte tenu de la valeur élevée de  $R_\omega$  cette vitesse est très faible. Les forces d'inertie associées à cet écoulement sont très petites et ne peuvent donc modifier de façon sensible l'équilibre existant entre les forces électromagnétiques et les forces de viscosité. De même le champ de pression sera peu affecté par l'écoulement et sera uniquement imposé par la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques.

Il convient de vérifier que le champ de pression engendré par la forme très particulière du champ magnétique est tout à fait compatible avec l'apparition d'une surface isobare sur toute la périphérie du cylindre de métal liquide. C'est à cette condition seulement que le trou de potentiel à rotation réversible peut remplir efficacement les fonctions que nous souhaitons réaliser.

La pression  $P$  est déterminée par les équations suivantes :

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \overline{F_r} + 2 \left( \nabla^2 u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 2 \left( \nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right), \end{cases}$$

qui se réduisent à :

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \overline{F_r}, \\ \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = v \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \end{cases}$$

et conduisent à la valeur suivante de la pression :

$$(51) \quad P = - \frac{4 B_0^2}{\mu ((a^3/b^3) + (b/a))^2} (e^{\sqrt{R_{\omega_1}}((r/a)-1)} \sin^2 2\theta + e^{\sqrt{R_{\omega_2}}((r/a)-1)} \cos^2 2\theta) \\ + \frac{4\sqrt{2}}{\mu ((a^3/b^3) + (b/a))^2} \cos 4\theta \left[ \left( \frac{5r^3}{a^3} - \frac{r}{3a} \right) \left( \frac{1}{R_{\omega_1}^{1/2}} - \frac{1}{R_{\omega_2}^{1/2}} \right) \right].$$

Puisque  $R_{\omega_1}$  et  $R_{\omega_2} \gg 1$  et  $r/a \leq 1$  la deuxième partie de cette expression, directement liée au champ de vitesse, est négligeable devant la première qui trouve son origine dans la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques. Ainsi la pression à l'intérieur du métal liquide est donnée par :

$$(52) \quad P = - \frac{4 B_0^2}{\mu ((a^3/b^3) + (b/a))^2} \\ \times (e^{\sqrt{R_{\omega_1}}((r/a)-1)} \sin^2 2\theta + e^{\sqrt{R_{\omega_2}}((r/a)-1)} \cos^2 2\theta) + C.$$

Il ressort clairement de cette expression que la surface extérieure ( $r=a$ ) du cylindre métallique liquide est une surface isobare. Ceci confirme que le trou de potentiel à rotation réversible permet de maintenir la circularité de la section d'une veine métallique liquide en mouvement, sans l'aide d'aucune

paroi. Dans ce cas la pression atmosphérique s'exerce sur la surface libre et la pression au sein de la veine métallique est donnée par :

$$(53) \quad P = \frac{4 B_0^2}{\mu ((a^3/b^3) + (b/a))^2} \left( 1 - e^{\sqrt{R_{w_1}}((r/a)-1)} \sin^2 2\theta - e^{\sqrt{R_{w_2}}((r/a)-1)} \cos^2 2\theta \right).$$

Le profil de pression se présente ainsi sous la forme d'un palier central bordé d'une zone superficielle, correspondant à la peau électromagnétique, dans laquelle la pression tombe rapidement à sa valeur dans l'atmosphère ambiante. Le trou de potentiel à rotation réversible, capable de faire apparaître à l'intérieur du métal liquide une surpression

$$\Delta P = \frac{4 B_0^2}{\mu ((a^3/b^3) + (b/a))^2},$$

substitué à l'inducteur d'une « busette électromagnétique » et assurer le centrage, le guidage ou le rétablissement de la forme circulaire de la veine métallique liquide que l'on désire contracter ou dont on veut réguler le débit.

Les figures 7 et 8 précisent la forme des lignes de courant de l'écoulement dans une section droite, dans le cas particulier  $R_{w_1} = 10$ ,  $R_{w_2} = 8$ . L'écoulement

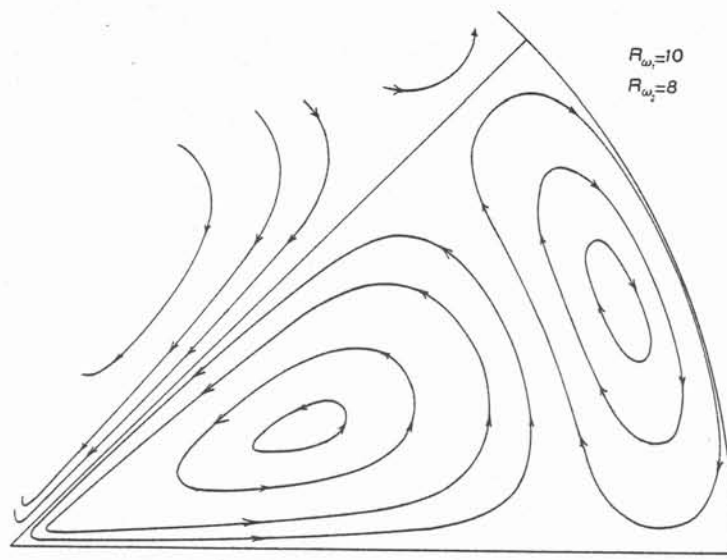


Fig. 7. — Écoulement produit dans une veine métallique par un « trou de potentiel » à rotation réversible (vue de détail).

Fig. 7. — Flow induced by a quadrupole field rotating in a reversible way (detailed view).

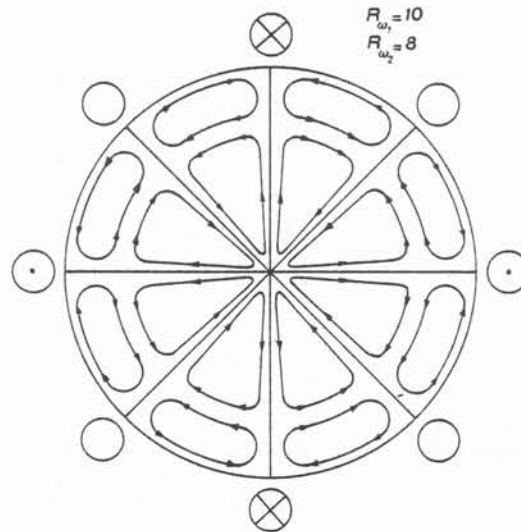


Fig. 8. — Écoulement produit dans une veine métallique par un « trou de potentiel » à rotation réversible (vue d'ensemble).

Fig. 8. — Flow induced by aquadrupole field rotating in a reversible way (view of the cross section).

cellulaire induit est constitué de seize vortex. Les diverses cellules sont limitées par les plans contenant les axes des conducteurs symétriques par rapport à l'axe du trou de potentiel.

#### 4. Conclusion

Cette étude a permis de fournir une nouvelle preuve qu'il est possible, grâce à l'utilisation de champs magnétiques alternatifs, de résoudre des problèmes technologiques liés au contact du métal liquide avec des parois. Par rapport à tout autre procédé, les procédés magnétohydrodynamiques possèdent l'énorme avantage de ne pas se limiter à apporter une solution à un problème donné, mais de supprimer totalement le problème en question. Ainsi notre dispositif électromagnétique de centrage, de guidage et de correction de forme de veines métalliques liquides, fait beaucoup plus que réduire les effets néfastes du contact métal liquide-paroi, puisqu'il conduit à leur parfaite suppression en remplaçant la paroi habituellement indispensable par une

paroi immatérielle constituée par des lignes de champ magnétique incapables, pour leur part, d'engendrer la moindre pollution.

La rentabilité d'un tel dispositif est indéniable : le coût de l'énergie nécessaire pour entretenir le champ magnétique n'égale jamais le montant des frais de fonctionnement des installations traditionnelles de coulée occasionnés par le bouchage, le remplacement fréquent et inévitable des busettes de coulée, le scalpage et autres problèmes semblables qui ont une origine commune : la présence des parois. En outre, la durée de vie d'un dispositif électromagnétique qui, par nature, ne comporte aucune pièce mobile soumise à l'usure, est pratiquement illimitée.

Bien que ce travail se soit limité à définir et à étudier un dispositif permettant le contrôle de la forme circulaire d'une veine métallique liquide, on peut certainement penser qu'il est possible de réaliser des inducteurs alimentés en courant alternatif susceptibles d'engendrer des champs magnétiques capables d'imposer et de contrôler des sections droites de formes beaucoup plus complexes et plus variées. Nul doute que dans un avenir proche, des dispositifs électromagnétiques verront le jour qui permettront, en l'absence de paroi, la fabrication de tubes, de profilés ou d'ébauches de profilés.

Il existe une relation étroite bien mise en évidence ([8], [9]) tout en n'ayant pas encore fait l'objet d'une explication complète [10], entre le brassage produit dans un métal liquide (par des sollicitations électromagnétiques ou mécaniques) et la séparation d'inclusions se trouvant dans ce métal. Notre dispositif utilisant un trou de potentiel à rotation réversible provoque à l'intérieur du métal liquide un brassage important dans chacune des cellules de recirculation. Il nous semble par conséquent souhaitable de poursuivre cette étude analytiquement ou expérimentalement dans le but d'évaluer et d'analyser la faculté supplémentaire probable de ce dispositif qui consisterait à concentrer les inclusions, crasses ou autres suspensions, soit au centre, soit à la périphérie de la veine liquide.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] GETSELEV Z. N., *Procédé de coulée continue et semi-continue de métaux et installation pour sa mise en œuvre*, Brevet n° 1 509 962, B 22 d, 4 octobre 1966, Kuibichevsky Metallurgichesky Zavod Imeni V. I. Lenina.
- [2] OKRESS E. C., WROUGHTON D. M., COMENETZ G., BRACE P. M. et KELLY J. C. R., *Electromagnetic Levitation of Solid and Molten Metals (J. Appl. Phys., vol. 25, n° 3, 1952, p. 545).*

- [3] SAGARDIA S. R. et SEGSWORTH R. S., *Electromagnetic Levitation Melting of Large Conducting Loads* (J. E. E. Trans. Ind. Appl., vol. 13, n° 1, 1977, p. 49).
- [4] GARNIER M. et MOREAU R., *Dispositif électromagnétique de confinement de métaux liquides*, Brevet français n° 75-21-075, 4 juillet 1975.
- [5] GARNIER M. et MOREAU R., *Procédé et dispositif électromagnétique pour diriger, en l'absence de parois des veines métalliques liquides, notamment pour les centrer, les guider ou contrôler leur forme circulaire*, Brevet français n° 77-21-513, 12 juillet 1977.
- [6] ALEMANY A. et MOREAU R., *Écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant* (J. Mécan., vol. 16, n° 4, 1977, p. ).
- [7] MOFFATT H. K., *On Fluid Flow Induced by a Rotating Magnetic Field* (J. Fluid Mech., vol. 22, n° 3, 1965, p. 521-528).
- [8] BONNIER E., ALLIBERT C. et DRIOLE J., *Procédé de séparation des particules ou inclusions, essentiellement non miscibles, d'une masse en fusion*, Brevet français n° 75-22-557, 18 juillet 1975.
- [9] ALBERNY A., BACKER R., BIRAT J. P., GOSSELIN P. et WANIN M., *Quality Improvement of Strand Cast Billets Through Electromagnetic Stirring* (Electric Furnace Proc., vol. 237, 1973, p. 247).
- [10] KHALETSKY D., *Étude théorique du brassage électromagnétique dans les fours à induction. Application à l'analyse d'un procédé de séparation électromagnétique* (Thèse du 3<sup>e</sup> cycle, U.S.M.G.-I.N.P.G., 1976).

(Manuscrit reçu le 13 mars 1978,  
accepté le 20 mars 1979.)



LE CONTROLE ELECTROMAGNETIQUE DES SURFACES

METALLIQUES LIQUIDES ET SES APPLICATIONS

Jacqueline ETAY\* - Marcel GARNIER\*

Accepté pour publication au  
JOURNAL DE MECANIQUE THEORIQUE  
ET APPLIQUEE

RESUME

Nous étudions expérimentalement les possibilités d'imposer une forme d'équilibre, choisie par avance, à une veine de métal liquide sans l'aide d'aucune paroi, en utilisant uniquement les effets induits par des champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée. L'analyse des mécanismes de base, reposant sur l'effet de peau électromagnétique, permet de dégager les conditions d'obtention du résultat. Celui-ci est mis en évidence dans deux réalisations expérimentales permettant d'imposer une section droite cruciforme, ou étirée sous forme d'une lame de faible épaisseur, à une veine métallique initialement circulaire. Les résultats expérimentaux sont confrontés à des prévisions théoriques.

\* GIS MADYLAM - BP 53X - 38041 GRENOBLE CEDEX.

## 2 - INTRODUCTION

Pour contenir un volume donné de matière, il n'est pas toujours possible de recourir à la solution la plus simple qui consiste en l'utilisation de parois matérielles. C'est le cas en particulier lorsque la matière considérée est un plasma à très haute température qui réagit vivement avec la plupart des matériaux. Très tôt, la solution consistant à utiliser des forces électromagnétiques pour confiner des volumes conséquents de plasma a été retenue et exploitée, notamment dans les expériences de fusion thermonucléaire contrôlée (tokamak). Dans l'industrie métallurgique, la présence des parois implique des contingences de maîtrise malaisée. D'une part, les matériaux réfractaires utilisés réagissent chimiquement avec les métaux fondus qui souffrent de pollution. D'autre part, afin de limiter l'érosion des parois, les vitesses de coulée du métal sont réduites et la productivité des installations atteint très vite un maximum.

L'utilisation de champs magnétiques alternatifs apporte dans certains cas une solution élégante à ces problèmes en supprimant les parois et en les remplaçant par un système de forces électromagnétiques équivalent. C'est le maintien de la stabilité des surfaces libres ainsi contrôlées qui limite principalement le procédé. Néanmoins, le creuset électromagnétique permet d'obtenir la lévitation de masses importantes de métal fondu maintenues en équilibre à l'encontre des forces de pesanteur, et à l'abri de toute pollution sous atmosphère contrôlée [1][2][3]. La lingotière matérielle peut également être supprimée dans la coulée continue de l'aluminium et remplacée par des forces électromagnétiques centripètes capables de contenir le métal jusqu'à solidification. Cette application est cependant limitée à la fabrication de billettes pleines ou creuses de géométrie circulaire [4][5].

Nous nous proposons de montrer qu'il est possible d'imposer à une colonne de métal, lors de l'élaboration de celui-ci par coulée continue et lorsqu'il est encore dans sa phase liquide, une forme différente d'un

cylindre circulaire sans qu'il y ait contact entre le métal et une paroi, en utilisant l'action de champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée (400 KHz ). Les applications pratiques de cette étude sont claires : des économies d'énergie importantes seront réalisées, lorsque le sidérurgiste solidifiera le métal dans la forme que lui aura imposée la géométrie du champ magnétique appliqué, grâce à l'élimination des premiers passages du métal en laminoir et du réchauffage correspondant. Pour d'autres métaux, comme le titane, très avides d'oxygène, la suppression des parois, source de pollution, améliorera leur pureté. Sur un plan fondamental, le problème posé est vaste et riche, puisqu'il englobe non seulement les questions de frontière libre soulevées par la détermination de la forme d'équilibre de la surface métallique liquide conditionnée par la répartition des forces électromagnétiques, elle-même fonction de la position de cette surface, mais aussi l'analyse des conditions de stabilité de l'équilibre obtenu [6][7].

Les principaux mécanismes physiques mis en jeu dans le formage électromagnétique sont rappelés dans une première partie. La seconde partie est consacrée à la description de l'installation expérimentale qui a permis de démontrer la possibilité d'obtenir en continu, directement à partir du métal liquide, des ébauches de profilés. La puissance du procédé est illustrée par deux réalisations particulières : l'élaboration de profilés cruciformes et de lames minces. Dans une dernière partie les formes d'équilibre obtenues expérimentalement sont confrontées aux géométries prédites par une analyse théorique [8].

## 2 - L'EFFET DE PEAU ELECTROMAGNETIQUE ET SES IMPLICATIONS

L'équation d'évolution du champ magnétique dans un milieu électroconducteur de dimension caractéristique  $L$ , de conductivité électrique  $\sigma$  et de perméabilité magnétique  $\mu$ , sujet à un écoulement dont l'échelle caractéristique de vitesse est  $V$  s'écrit :

$$R_{\omega} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \Delta \vec{b} + R_m \text{Rot} (\vec{u} \wedge \vec{b})$$

où :

- $\vec{u}$  et  $\vec{b}$  désignent la vitesse et le champ magnétique rapportés à leurs valeurs typiques respectives.
- $t$  : le temps rendu adimensionnel avec le temps caractéristique  $T$  d'évolution du champ magnétique ( $T=2\pi\omega^{-1}$ ) dans le cas d'un champ magnétique alternatif de pulsation  $\omega$ .
- $\Delta$  et  $\text{Rot}$  les opérateurs adimensionnels associés à l'échelle  $L$ .

avec :  $R_{\omega} = \mu \sigma L^2 / T$  et  $R_m = \mu \sigma V L$ .

Au laboratoire, ou à l'échelle industrielle, avec les métaux liquides habituels, le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$  est toujours faible devant l'unité ( $R_m < 10^{-1}$ ) et tout effet de convection du champ magnétique par le champ de vitesse peut être négligé. L'équation de l'induction se réduit alors à une équation de diffusion

$$R_{\omega} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \Delta \vec{b}$$

essentiellement dominée par l'effet de peau. Elle impose, lorsque l'échelle de temps  $T$  est fixée par la pulsation  $\omega$  des courants inducteurs, l'échelle de longueur caractéristique :

$$L \sim \delta \quad \text{ou} \quad \delta = \left( \frac{2}{\mu \sigma \omega} \right)^{1/2}.$$

Dans cette épaisseur de peau  $\delta$  le champ magnétique s'annule en donnant naissance à des courants de Foucault ( $j \approx B/\mu\delta$ ) qui interagissent avec lui pour engendrer une force de Lorentz  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  (fig. 1). Lorsque  $\delta \ll \ell$  il est élémentaire de décomposer cette force en une partie irrotationnelle  $|F_{\text{irrot}}|$  de l'ordre de  $B^2/2\mu\delta$  et une partie rotationnelle  $|F_{\text{rot}}|$  de l'ordre de  $B^2/\mu\ell$  si  $\ell$  désigne l'échelle typique de variation du champ magnétique de valeur efficace  $B$  le long de la surface du milieu conducteur. Ainsi :

$$\frac{|F_{\text{irrot}}|}{|F_{\text{rot}}|} \sim \frac{\ell}{\delta} \sim (\mu \sigma \omega)^{1/2} \ell \sim R_{\omega}^{1/2}$$

Par suite, lorsque l'effet de peau est bien marqué ( $R_{\omega} \gg 1$ ) la force électromagnétique qui s'exerce sur le milieu électroconducteur se réduit essentiellement à une pression  $B^2/2\mu$ . Ceci est d'autant plus vrai que la conductivité électrique du milieu considéré ou que la fréquence du champ magnétique appliqué est plus élevée. Un liquide conducteur verra donc sa surface soumise à une pression inégalement répartie.

C'est en exploitant cette possibilité que nous pouvons lui imposer des configurations géométriques variées. L'équilibre de la surface libre du liquide résulte de la compétition entre les forces de pression magnétique et les forces de tension superficielle qui tendent à imposer une forme circulaire.

### 3 - ETUDE EXPERIMENTALE

L'installation expérimentale (fig. 2) est constituée d'une boucle hydraulique dans laquelle circule le mercure, métal liquide de simulation, comprenant en série un réservoir, une pompe, une cuve à niveau constant de hauteur variable et une section d'essais dans laquelle le mercure s'écoule en jet libre sous l'action de la gravité. A l'entrée de la section d'essais un nid d'abeille et un convergent amovible ont été placés de façon à obtenir un jet de bonne qualité géométrique et de section initiale d'aire et de formes variées.

Le jet libre est soumis au champ magnétique engendré par un inducteur branché en parallèle aux bornes d'un ensemble de condensateurs de façon à constituer un circuit oscillant. Ce circuit est alimenté par un générateur de type apériodique qui a la particularité de toujours fonctionner à la fréquence de résonance du circuit oscillant quelle que soit l'évolution des caractéristiques de celui-ci. Le générateur fournit la puissance électrique nécessaire à l'entretien des oscillations dans le circuit inducteur dans une gamme de fréquence s'étendant à 0,5 KHz à 400 KHz. Les inducteurs sont réalisés en tube de cuivre parcourus par une circulation d'eau de façon à éliminer les calories produites par effet Joule. A une géométrie d'inducteur correspond une configuration du champ magnétique et une forme d'équilibre possible du jet de mercure.

Les expériences ont été réalisées avec deux types d'inducteurs : le premier, inducteur quadripolaire, permet d'imposer une section cruciforme à la veine de mercure initialement circulaire, le second, inducteur multispire, lui impose de s'étirer sous la forme d'une lame mince.

### 3.1. L'inducteur quadripolaire

Il est constitué (fig. 3) de quatre conducteurs rectilignes disposés de telle façon que la trace de leurs axes dessine les sommets d'un carré dans une section horizontale. Le courant qui parcourt un conducteur est de même intensité et de sens opposé aux courants qui parcourent ses deux voisins immédiats. Le champ magnétique engendré par cet inducteur présente des gradients importants : en particulier, sur la surface d'un jet métallique circulaire, il est intense au voisinage de chacun des conducteurs et, pour des raisons de symétrie, il est nul en tout point situé à égale distance de deux conducteurs. Soumis aux forces de pression non uniformément réparties sur sa périphérie, le métal liquide fuit les régions proches des conducteurs et gagne les régions de champ magnétique faible (fig. 4). Dans ces régions, l'effet de la tension superficielle est prédominant et impose le rayon de courbure de la surface qui prend la forme d'une hypocycloïde émoussée. En l'absence de tension superficielle la forme d'équilibre est rigoureusement une hypocycloïde obtenue de façon classique avec les plasmas [ 9 ].

Les formes d'équilibre obtenues pour différentes valeurs de l'intensité dans l'inducteur, pour un débit de  $100 \text{ cm}^3/\text{set}$  et un diamètre initial de 10 mm sont représentées sur la figure 5. Le système de mesure de la position de la surface libre est un circuit électrique constitué d'un fil de tungstène de 8/100 mm placé dans un tube de verre effilé, monté sur une table de déplacement XY et relié à une borne d'un générateur de courant continu dont l'autre borne est reliée au mercure par l'intermédiaire d'un voltmètre. Malgré de faibles oscillations dues aux vibrations de la pompe, la dispersion des points de mesure n'excède pas 2/10 mm. Les surfaces d'équilibre sont déterminées point par point avec un pas de 1/10 mm.

Le coefficient de formage : rapport entre la plus grande et la plus faible distance entre l'axe de la veine métallique et un point de la surface libre atteint au maximum la valeur 2 pour

un diamètre initial ( $2 R$ ) de 9 mm, une fréquence de 200 KHz ( $\delta/R \sim 0,25$ ), une intensité efficace de 3 000 A, une ddp efficace aux bornes de l'inducteur de 700 V, et un débit de 100 cm<sup>3</sup>/s.

Pour obtenir la meilleure efficacité du champ magnétique et des formes d'équilibre très stables, nous avons dû avoir recours à deux artifices :

- Lorsque le mercure s'écoule dans la section d'essais, il s'accélère sous l'effet de la pesanteur. Il se produit donc une diminution de section du jet dont la surface tend à s'éloigner des conducteurs et donc à échapper aux régions de champ magnétique fort. Pour compenser cet effet, une légère convergence a été donnée à l'inducteur : pour un jet de diamètre 10 mm, la distance séparant deux conducteurs diamétralement opposés est 11 mm à la partie supérieure de l'inducteur, de longueur 325 mm, et 8 mm à la partie inférieure.

- Il n'est pas possible à cause des connexions reliant l'inducteur aux condensateurs d'avoir un champ magnétique quadripolaire sur toute la longueur de l'inducteur. Le champ magnétique créé par ces connexions engendre des perturbations importantes dans le jet de mercure, dès son entrée dans l'inducteur, qui sont convectées par le métal et nuisent au formage. Pour éliminer l'influence parasite des connexions, nous les avons placées entre deux plaques de cuivre refroidies, d'épaisseur supérieure à la profondeur de pénétration du champ magnétique à la fréquence utilisée. Des courants induits se développent dans ces "écrans" en opposition de phase avec les courants dans les connexions ; le champ magnétique résultant est nul entre les deux écrans. Les photos 1 et 2 illustrent le formage d'une croix. Sur la photo 1 le champ magnétique est nul ; le mercure adopte une forme circulaire. Sur la photo 2, on peut voir que le mercure situé entre les écrans conserve une géométrie circulaire alors que celui situé au-dessous des écrans adopte la géométrie cruciforme que lui imposerait un inducteur quadripolaire de longueur infinie ; seules deux des branches de la croix sont visibles.



L'inducteur quadripolaire peut également être utilisé pour réaliser le guidage d'un jet de métal liquide. En effet, le champ magnétique créé par un inducteur quadripolaire est faible, voire nul, dans la zone centrale de cet inducteur. Lorsqu'un jet de métal liquide de faible diamètre coule sous l'effet de la gravité au centre de l'inducteur placé verticalement, il ne subit pratiquement aucune force électromagnétique. Mais dès qu'il s'écarte de la zone centrale de l'inducteur, les forces de Lorentz, qui résultent de la présence de mercure dans une zone de champ fort, l'obligent à se recentrer. C'est le même phénomène qui, lorsque l'inducteur est incliné par rapport à la verticale, force le jet à garder son axe en coïncidence avec l'axe de l'inducteur. (photos 3 et 4).

### 3.2. L'inducteur multispire

Il permet d'imposer une forme de lame mince à un jet métallique de section initialement circulaire. L'intérêt industriel d'une telle géométrie nous paraît résider notamment dans la fabrication de matériaux amorphes [10]. Certains alliages métalliques subissant un refroidissement très rapide, ou ultratrempe, peuvent se solidifier en échappant à la cristallisation, et garder à l'état solide, la structure qu'ils avaient à l'état liquide. Cet état, dit amorphe, est obtenu généralement à partir de lames minces brutalement solidifiées au contact d'un disque refroidi. La fabrication de telles lames à partir de fentes matérielles est problématique. D'une part la tension superficielle a un effet destabilisant qui tend à déchirer la lame en plusieurs jets circulaires parallèles ; ceci oblige les métallurgistes à placer le disque de trempe très près (moins de 2 mm) de la fente de coulée. D'autre part, la fente délicate à réaliser en matériaux réfractaires se bouche très facilement, s'érode très vite ce qui entraîne une évolution constante de l'épaisseur de la lame et une pollution du métal. Le dispositif électromagnétique permet d'éliminer tous ces problèmes en supprimant la fente de coulée.

Pour imposer une forme de lame à une veine de métal liquide initialement circulaire, il suffit de la soumettre à un champ magnétique alternatif intense parallèle (fig. 6). Les forces qui apparaissent dans la peau électromagnétique ont pour effet d'étirer le jet métallique dans la direction des lignes de champ de façon à ce que la configuration du champ magnétique soit aussi voisine que possible de ce qu'elle serait en l'absence de métal. La présence du champ magnétique possède un grand avantage puisqu'elle s'accompagne d'un effet fortement stabilisant qui retarde considérablement l'apparition des instabilités capables de déchirer la lame : plusieurs centimètres de lame stable sont couramment obtenus.

L'inducteur utilisé est formé de deux bobines coaxiales (fig. 7) branchées en parallèle aux bornes des condensateurs d'accord : le courant circulant dans le même sens dans chacune des bobines, le champ magnétique engendré est quasi unidirectionnel, parallèle à l'axe des bobines. De façon à augmenter l'amplitude du champ magnétique, pour une intensité donnée du courant dans les bobines, un élément de ferrite refroidi, en forme de U est placé dans chaque bobine (fig. 8). La "culasse magnétique" ainsi formée canalise les lignes de champ et les concentre dans la région où elles sont nécessaires : à puissance donnée, la présence des ferrites permet de doubler le champ magnétique. Dans les expériences, les bobines étaient constituées de six spires ( $\varnothing$  intérieur 25 mm) réparties en deux couches superposées.

Une approximation simple de la géométrie de la lame permet de trouver l'ordre de grandeur du champ magnétique à fournir pour obtenir une épaisseur  $e$ . La forme de la surface libre du métal résulte de la compétition entre les forces électromagnétiques et les forces dues à la tension superficielle  $\tau$ . Dans la partie plane de la lame, le rayon de courbure étant nul, seul le champ magnétique agit, alors qu'à ses extrémités un point d'arrêt du champ magnétique apparaît où seul l'effet de la tension superficielle existe. De l'uniformité de la pression dans une section transversale du fluide il résulte :

$$\frac{B^2}{2 \mu} \sim \frac{2 \tau}{e} \quad \text{soit } B \sim 2 (\mu \tau/e)^{1/2}$$

Par exemple, pour obtenir une lame d'épaisseur 1 mm avec du mercure, on est conduit à utiliser un champ magnétique de l'ordre de 500 gauss.

Cette estimation de B n'est valable que si le rapport  $\delta/e$  reste petit devant l'unité. Dans le cas contraire, le champ magnétique à produire, et par suite la puissance à fournir, peuvent être très supérieurs à cette valeur. D'une part, la partie rotationnelle des forces électromagnétiques devient alors importante et une fraction non négligeable de la puissance fournie sert à mettre le liquide en mouvement. D'autre part, le champ magnétique cesse d'être nul sur l'axe de la lame dès que  $\delta \sim e$  l'efficacité de la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques s'amoindrit. La condition  $\delta/e \ll 1$  est donc primordiale ; la valeur minimale de l'épaisseur qu'il est possible d'atteindre pour une fréquence donnée est  $e = \delta$ . Pour dépasser cette limite, il faut augmenter très fortement l'intensité du champ magnétique et par suite la puissance à fournir. L'élaboration de lames minces nécessite généralement des fréquences élevées : c'est ainsi que des courants pulsant à 1 MHz sont nécessaires pour obtenir des lames de mercure d'épaisseur 0,5 mm.

Les photos 5 et 6 montrent un exemple de réalisation de lames de mercure. En raison de l'effet convectif de l'écoulement, la lame n'atteint pas son maximum de largeur au voisinage de l'entrée de l'inducteur. Le jet métallique formé se présente sous forme de fuseaux successifs dont la longueur augmente avec la vitesse d'écoulement du métal. A cause de la tension superficielle qui agit seule à la sortie de l'inducteur et tend à redonner une section circulaire à la veine métallique, deux fuseaux successifs sont situés dans des plans verticaux perpendiculaires. Ce phénomène est tout à fait analogue à celui observé avec des jets issus de fentes matérielles [11]. Ce phénomène est illustré par la photo 7.

#### 4 - COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS EXPERIMENTAUX ET LES RESULTATS THEORIQUES

Des formes d'équilibre obtenues avec un champ magnétique quadripolaire ont été calculées par SHERCLIFF à l'aide d'une analyse théorique utilisant de façon complémentaire les variables complexes et les méthodes numériques [ 8 ]. L'introduction de ces dernières est liée à la difficulté d'échapper à un processus itératif lorsque la tension superficielle est prise en compte. Cette analyse repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- une profondeur de pénétration nulle du champ magnétique dans le métal liquide (ce qui rend légitime l'utilisation des potentiels complexes dans la détermination du champ magnétique extérieur harmonique).

- une géométrie bidimensionnelle qui ignore les effets dus à la gravité et à la longueur finie de l'inducteur.

- des conducteurs électriques filiformes.

Le calcul effectué est basé sur la possibilité de transformer de façon univoque un quart de plan physique dans lequel l'équation de la surface libre est inconnue, en un demi-plan de l'espace d'une variable complexe, à la frontière duquel la surface libre est transformée en un segment de droite de longueur  $2\alpha - \alpha$  devenant un paramètre du problème, prenant en compte l'aire de la section de métal à former par rapport à l'aire du carré fermé par les quatre conducteurs - et dans lequel le champ magnétique est uniforme. La principale transformation conforme utilisée est la transformation de Schwarz Christoffel généralisée qui assimile la surface libre inconnue à un polygone ayant une infinité de côtés de longueur infiniment petite. Cette transformation est particulièrement bien adaptée à la prise en compte de la tension superficielle puisqu'elle introduit le rayon de courbure local comme variable. L'itération numérique se fait en ajustant les paramètres  $\alpha$  et  $a$  (rapport entre

la pression magnétique  $B^2/2\mu$  et la pression totale dans le fluide  $p$  de façon à ce que la condition aux limites traduisant l'équilibre local entre la pression magnétique et les forces de tension superficielle soit assuré.

Cette théorie prédit deux types de configuration suivant la valeur initiale du paramètre  $\alpha$ .

4.1. Lorsque  $\alpha$  est inférieur à une valeur critique  $\alpha_c$  et lorsque le champ magnétique tend vers l'infini, la surface d'une section de métal devient une hypocycloïde. C'est la forme qu'adopte la surface lorsque sa tension superficielle est négligeable.

4.2. Lorsque  $\alpha$  est supérieur à  $\alpha_c$ , il apparaît des protubérances de métal liquide aux quatre coins de l'hypocycloïde lorsque le champ magnétique devient grand. Deux séries de courbes calculées sont représentées en [8] pour diverses valeurs de  $a$ , paramètre peu commode d'accès expérimentalement, en raison de la prise en compte de la pression intérieure  $p$  du fluide, l'une pour une valeur initiale de  $\alpha$  inférieure à  $\alpha_c$ , l'autre pour une valeur supérieure.

Lors de nos expériences nous sommes limités par l'intensité du champ magnétique et nous devons faire en sorte que le mercure soit le plus près possible des conducteurs. Nous nous situons donc dans le cas  $\alpha > \alpha_c$ . Nous n'avons pas mis en évidence l'existence des protubérances. Cette absence s'explique par les faits que les conducteurs employés ne sont pas filiformes mais ont, pour des nécessités de refroidissement, une section droite d'aire importante devant celle de la veine métallique et que, l'épaisseur de peau expérimentale devient, dans les coins, de l'ordre de grandeur de

la longueur caractéristique  $\ell$ . Si malgré ceci les protubérances existent, le volume des conducteurs nous en a empêché la mesure. Ces remarques permettent de mieux comprendre la forme de la courbe  $U = 770$  V de la figure 5, très éloignée des formes calculées. Une comparaison entre une courbe calculée ( $\alpha = 100$ ) et une courbe expérimentale ( $\alpha \sim 75$ ) est représentée sur la figure 9. L'accord entre ces deux courbes est satisfaisant. Outre le fait déjà signalé de la forme des conducteurs, les écarts qui apparaissent entre les deux courbes sont dus à la difficulté d'obtenir une bonne symétrie géométrique et électrique de l'inducteur.

## 5 - CONCLUSION

Les expériences réalisées ont clairement mis en évidence la propriété que possèdent les champs magnétiques alternatifs de fréquences élevées de pouvoir imposer et contrôler de façon stable la forme d'un domaine métallique liquide. De nombreuses applications métallurgiques en découlent comme la fabrication en continu d'ébauches de profilés, ou l'élaboration de matériaux amorphes sous champ magnétique, actuellement en cours d'expérimentation. Sur un plan fondamental, le sujet abordé est très riche ; il est à replacer dans le cadre plus général de l'étude des comportements de frontière libre en présence de champs harmoniques : jet, cavitation, ondes de surface... La résolution de ces problèmes exige généralement une géométrie bidimensionnelle. Cependant des méthodes basées sur des formulations globales utilisant des principes variationnels d'énergie pourraient permettre d'oublier cette contrainte géométrique et de prendre en compte la diffusion du champ magnétique dans le domaine métallique et rapprocherait la théorie et les expériences.

Des analogies intéressantes existent entre le comportement d'un métal liquide en présence d'un champ magnétique alternatif de très haute fréquence et celui d'un ferrofluide placé dans un champ magnétique continu de même géométrie [12]. L'effet de répulsion observé sur un métal liquide est l'homologue de l'effet d'attraction éprouvé par le ferrofluide. Ainsi les formes obtenues avec une veine métallique liquide placée dans un inducteur apparaissent complémentaires des formes créées pour un ferrofluide par des conducteurs de même géométrie.

Les auteurs remercient le Professeur Shercliff pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Liste des figures

- figure 1 : Le conducteur parcouru par le courant  $I = I_0 \sin \omega t$ , crée des forces de Lorenz, dans l'épaisseur de peau du métal liquide.
- figure 2 : schéma de l'installation expérimentale.
- figure 3 : dessin de l'inducteur quadripolaire et des écrans.
- figure 4 : un inducteur quadripolaire impose une forme de croix à une surface de métal liquide initialement circulaire.
- figure 5 : formes de croix mesurées. Le diamètre du jet circulaire correspondant est de 9 mm.
- figure 6 : un inducteur créant un champ magnétique parallèle impose au métal liquide une forme de lame.
- figure 7 : schéma de l'inducteur multispire.
- figure 8 : ferrite percée. Elle est placée dans chaque bobine de l'inducteur multispire pour éviter les fuites de champ magnétique.
- figure 9 : comparaison entre une surface mesurée - en pointillé - et une surface calculée - en trait plein.



Liste des photos

photo 1 : Une veine de mercure coule dans l'inducteur quadripolaire dont 3 des 4 conducteurs sont visibles. L'intensité du courant dans l'inducteur est nulle.

Photo 2 : Un courant de 2000 A efficace sous une tension de 600 Volts efficace parcourt l'inducteur. Deux des quatre branches de la croix formée apparaissent. Entre les écrans la veine de mercure n'est pas déformée.

Photo 3 : L'inducteur quadripolaire est incliné de  $6^\circ$  par rapport à la verticale. Aucun courant ne circule dans l'inducteur.

Photo 4 : Lorsqu'un courant suffisant circule dans l'inducteur l'axe du jet de mercure s'incline lui aussi d'un angle de  $6^\circ$  par rapport à la verticale.

Photo 5 : Un jet de mercure de 5 mm de diamètre coule entre les deux bobines de l'inducteur dans lequel aucun courant ne circule.

Photo 6 : Lorsqu'un courant suffisant circule dans l'inducteur le mercure s'étire sous forme de lame.

Photo 7 : La tension superficielle engendre une succession de fuseaux perpendiculaires les uns aux autres.

R E F E R E N C E S

- | 1 | OKRESS E.C. - WROUGHTON D.M. - COMENETZ G. - BRACE P.M. -  
KELLY J.C.F.  
"Electromagnetic levitation of solid and molten metals"  
Jour. of Applied Physics. 23. 5. 545 (1952)
  
- | 2 | SAGARDIA S.R. - SEGSWORTH R.S.  
"Electromagnetic levitation melting of large conductive  
loads"  
JEEE Trans. on Industry Applications 1A. 13. 49-52 (1977).
  
- | 3 | SAGARDIA S.R.  
"Multiple frequency electromagnetic levitation"  
Master thesis. University of Toronto (1971).
  
- | 4 | GETSELEV Z.N.  
"Procédé de coulée continue et semi continue de métaux et  
installation pour sa mise en oeuvre"  
Brevet N° 1.509.962 B22d (1966).  
Knibichevsky Metallurgischesky Zavod Imeni VI. Lenina.
  
- | 5 | GETSELEV Z.N.  
"Problems and development projects in continuous casting  
in the electromagnetic mold"  
Tsvetnye Metally, 2. 64. 1974.
  
- | 6 | SHERCLIFF J.A.  
"Two-dimensional plasma equilibria"  
J. PLasma Physics. 21. 2. 347,360 (1979)

- | 7 | SNEYD A.D. - MOFFATT H.K.  
"The fluid dynamics of the process of levitation melting"  
J. of Fluid Mechanics (à paraître : 1982)
- | 8 | SHERCLIFF J.A.  
"Magnetic shaping of molten metal columns"  
Proc. R. Soc. London, A375. 455,473. (1981)
- | 9 | BERKOWITZ J. - FRIEDRICH K.O. - GOERTZEL H.  
"Cusped geometries"  
Proceedings of the 2nd International Conference on  
Peaceful Uses of Atomic Energy - Genève 1958.
- | 10 | ANTONY T.R. - CLINE H.E.  
"On the uniformity of amorphous metal ribbon formed by  
a cylindrical jet impinging on a flat moving substrate"  
J. Appl. Phys. 42 - 2 - 829,837 - (1978)
- | 11 | RAYLEIGH  
"On the capillary phenomena of jets"  
Proc. R. Soc. London, 29, 71,92. (May 1979)
- | 12 | BRANCHER J.P. - SERO GUILLAUME O.  
"Sur l'équilibre des liquides magnétiques. Application à la  
magnétostatique"  
J.M.T.A. (à paraître).

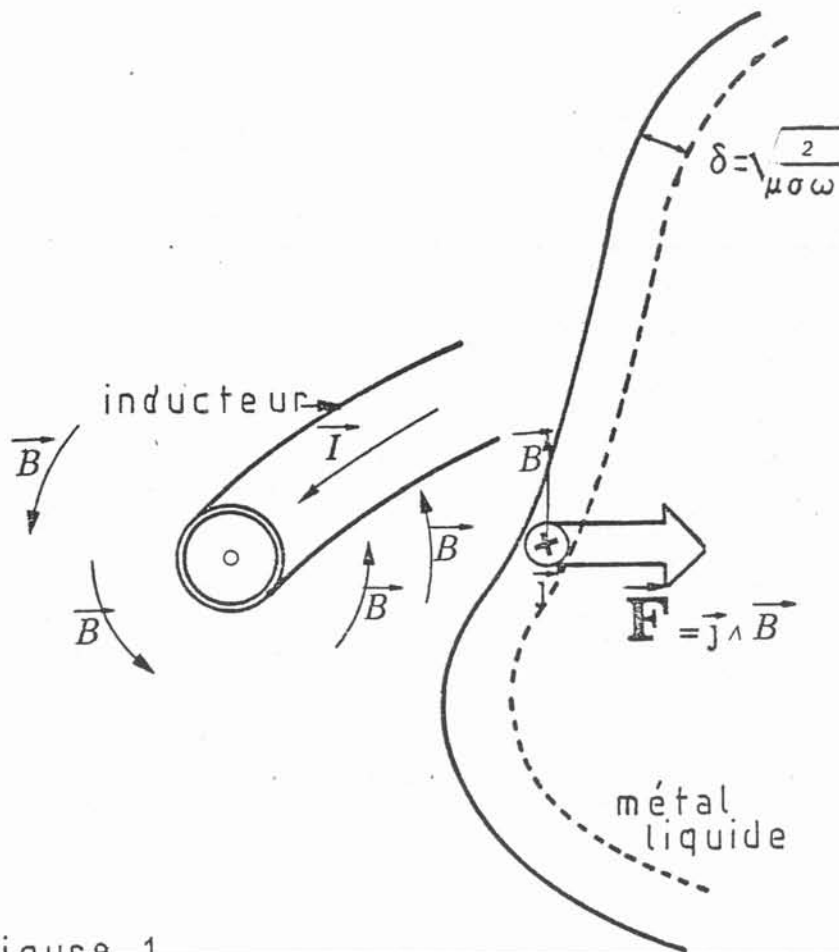


figure 1

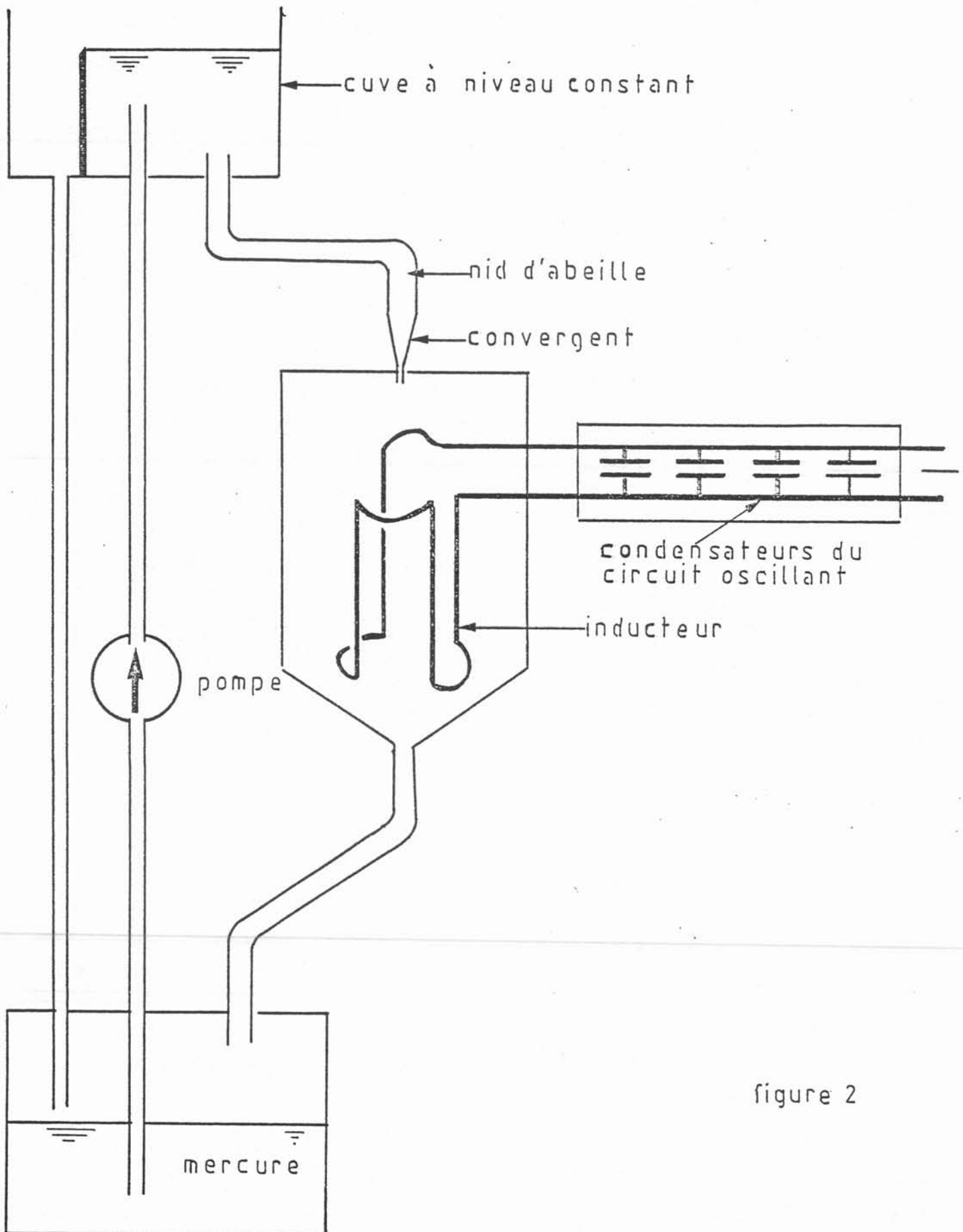
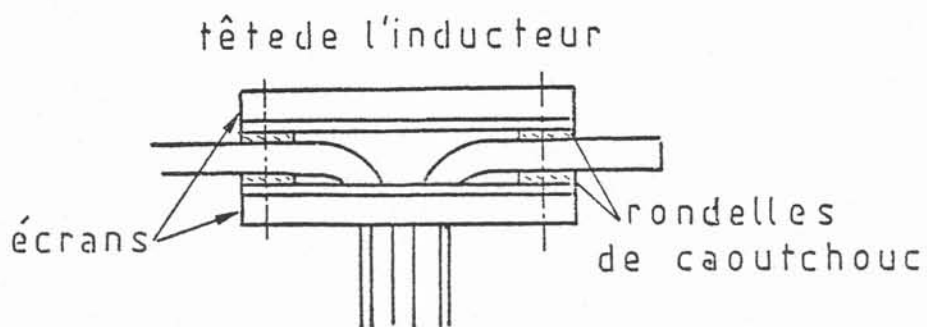
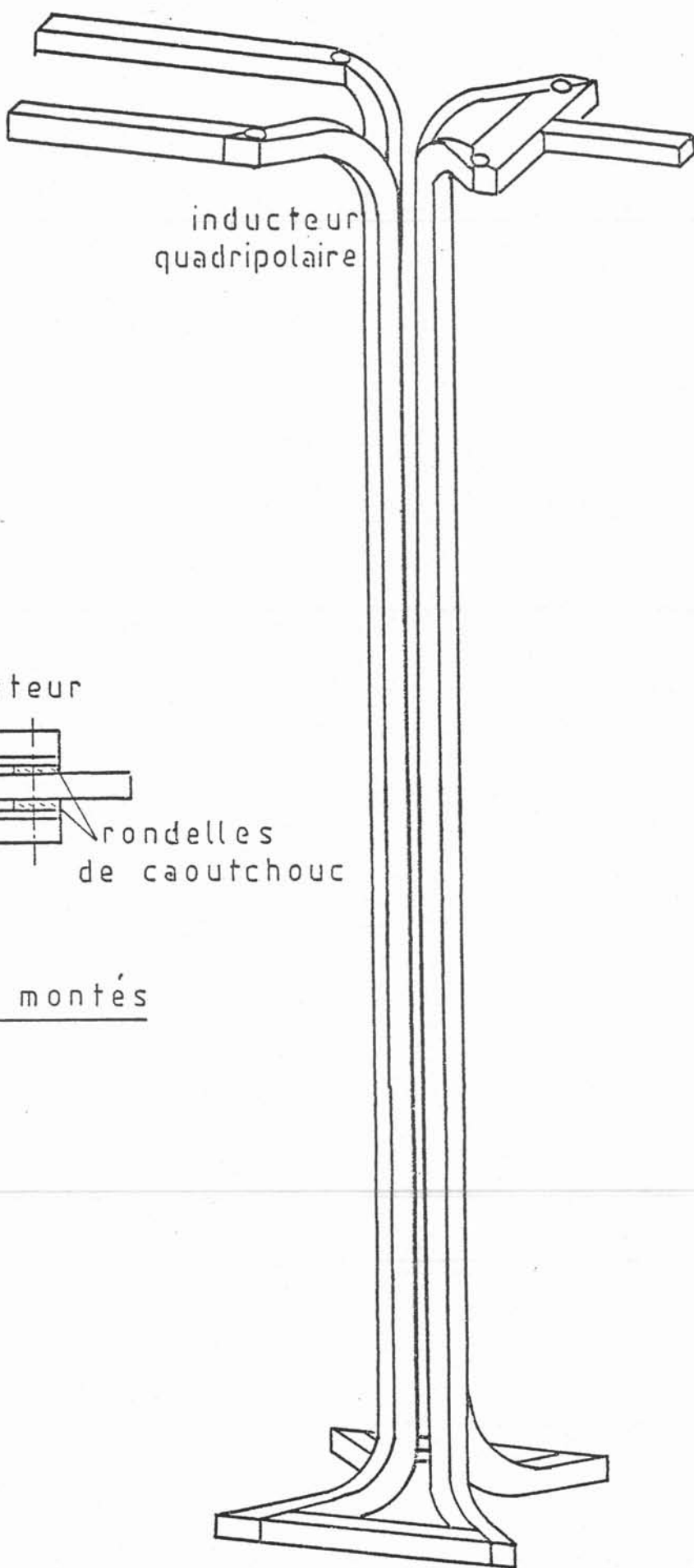


figure 2



Vue des écrans montés

figure 3

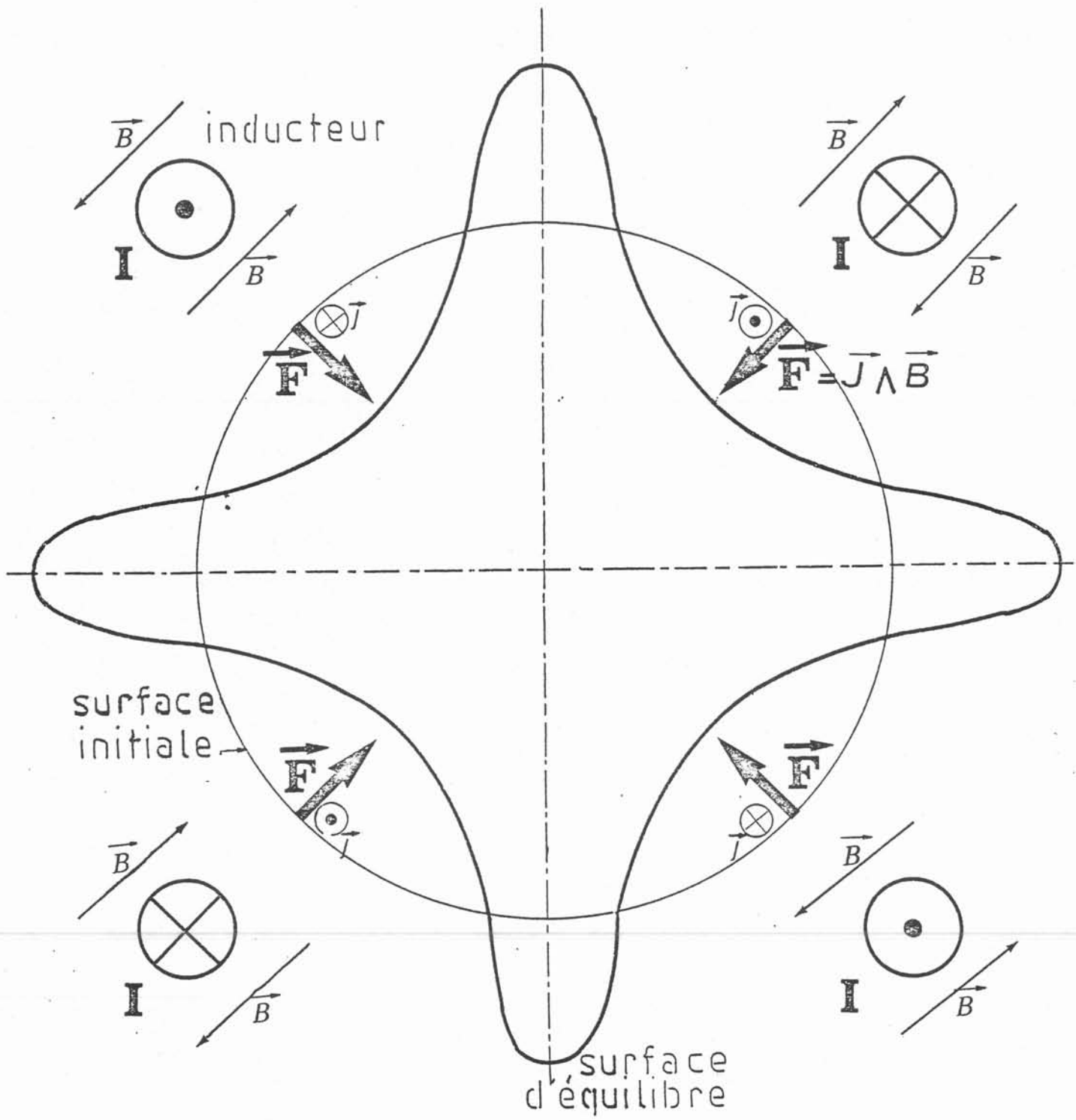


figure 4

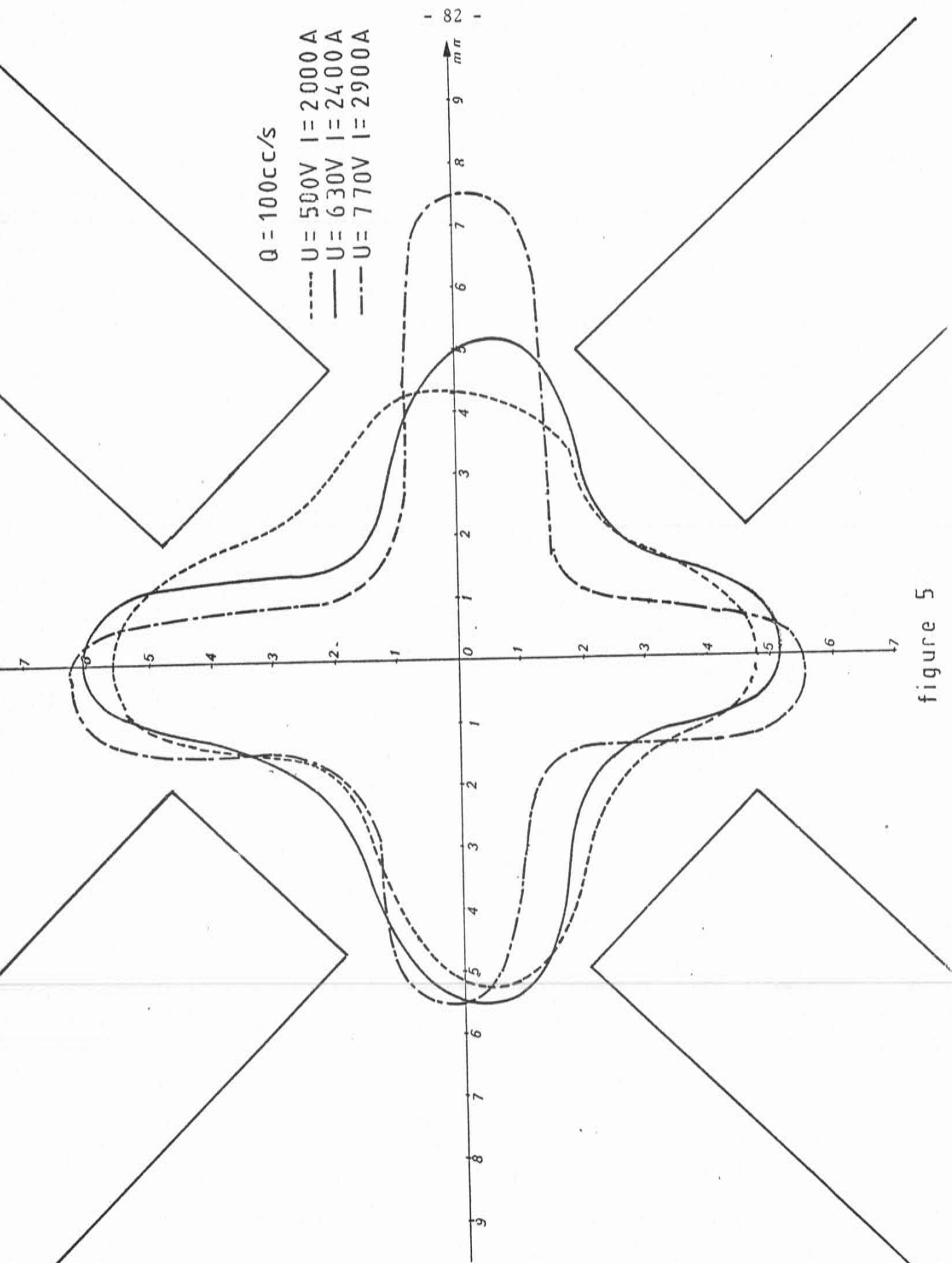
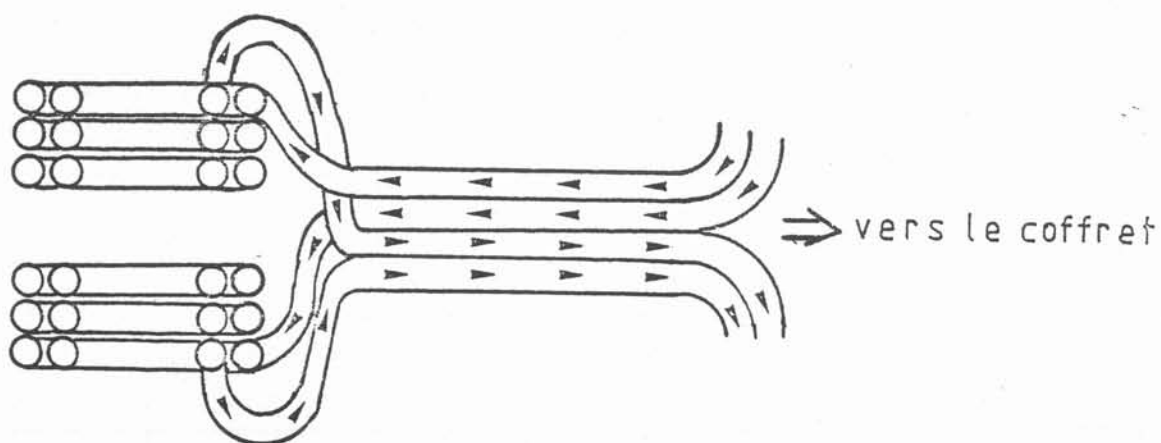


figure 5



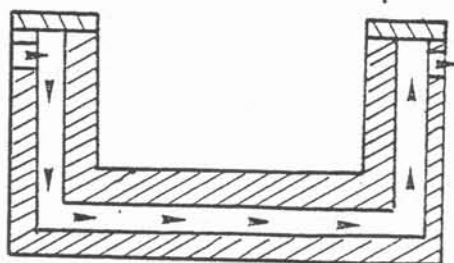
inducteur multispire



► circulation d'eau

figure 7

ferrite - coupe



ferrite - vue de dessus

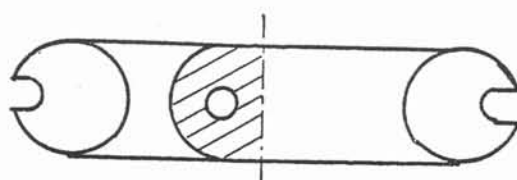


figure 8

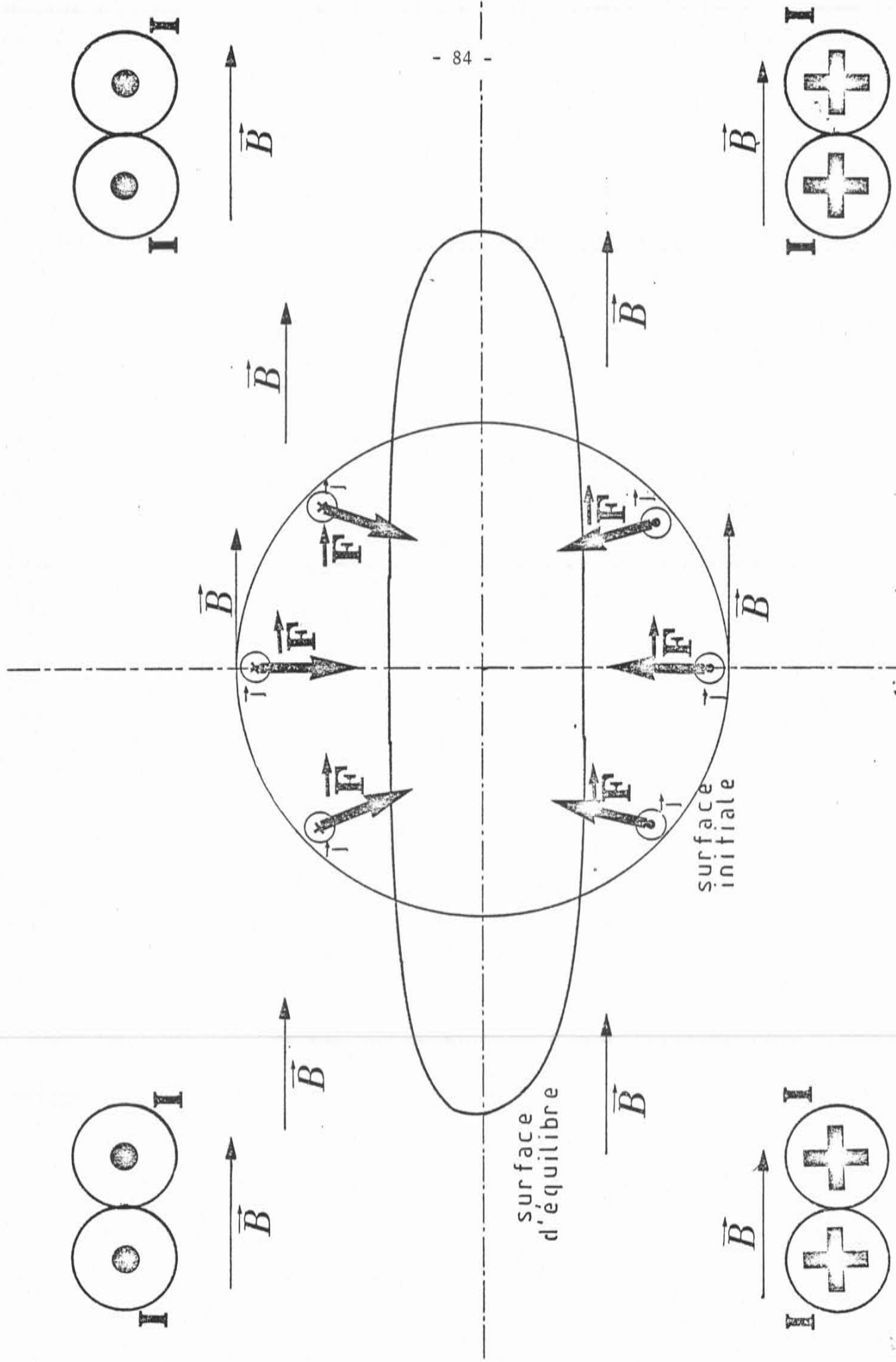


figure 6

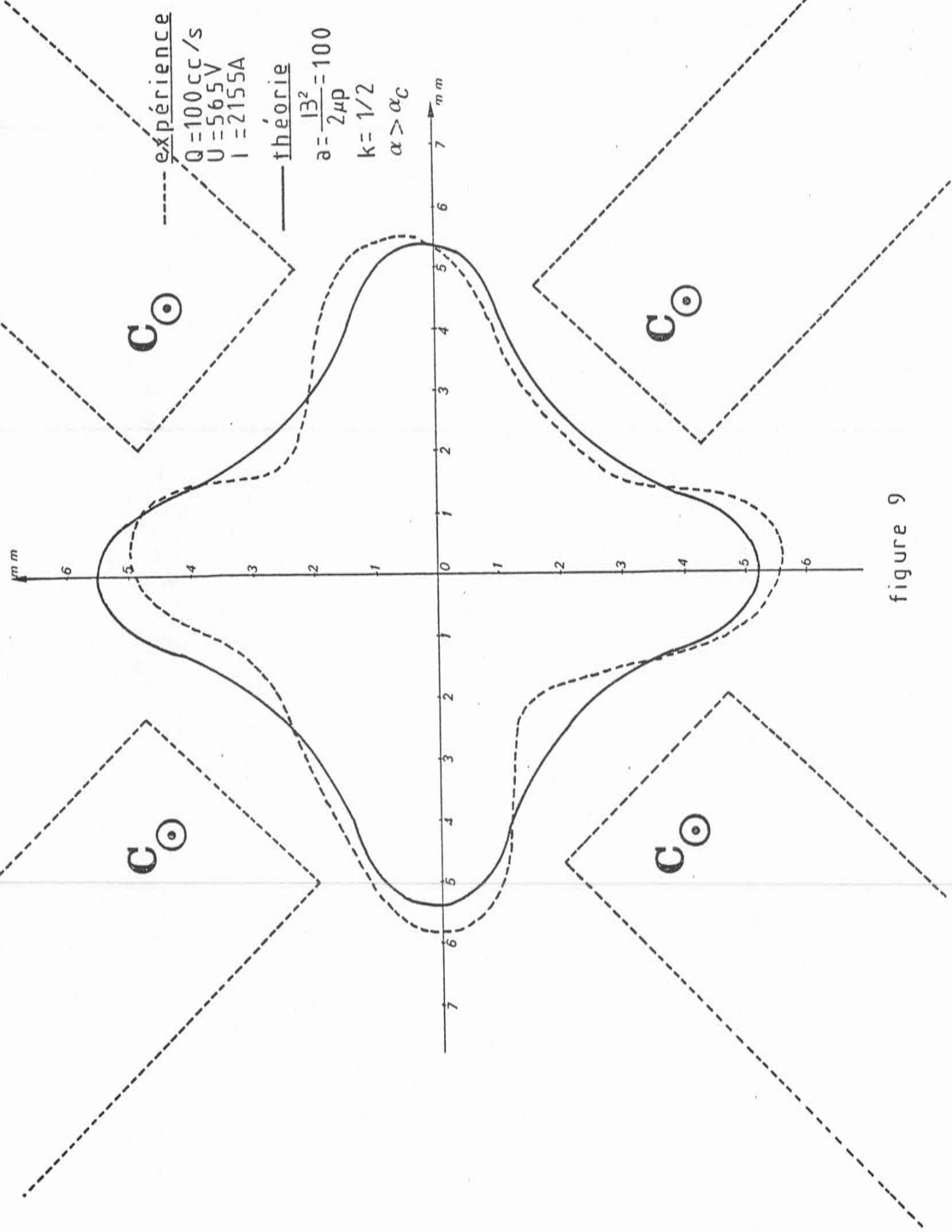


figure 9

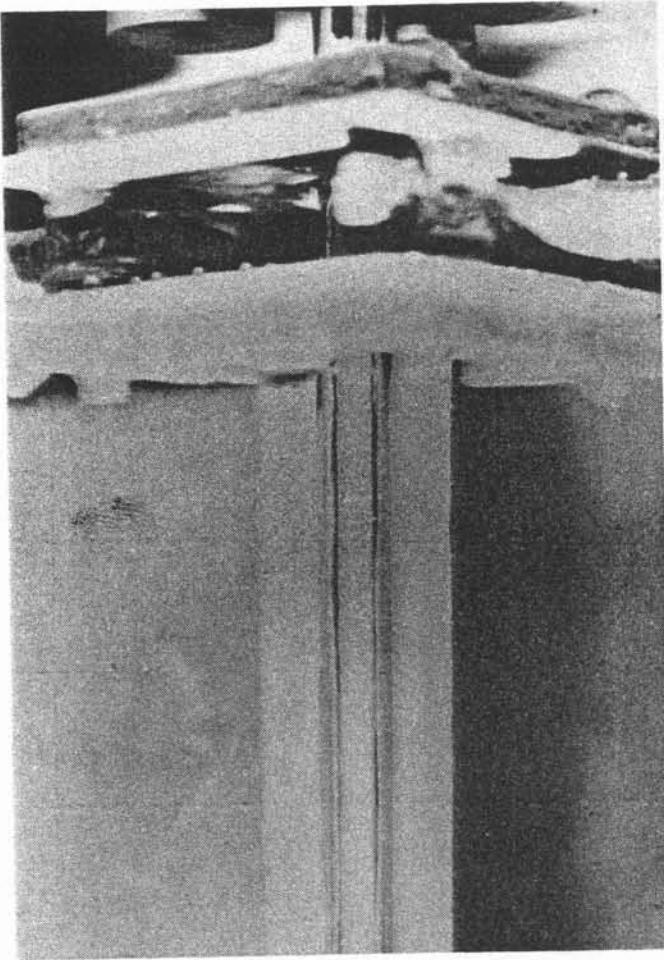


Photo 1

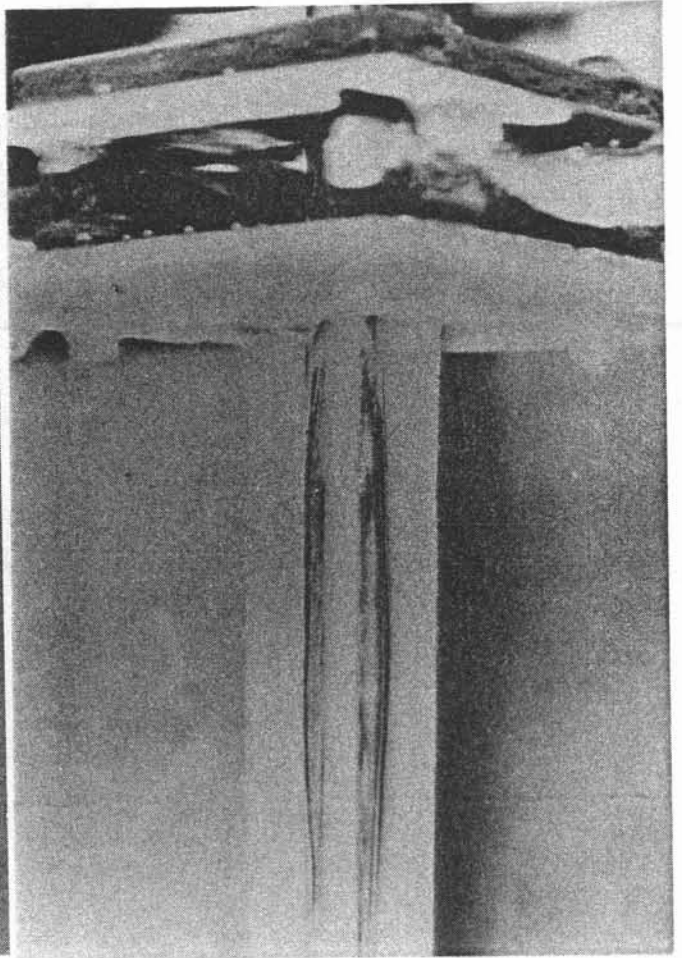


Photo 2

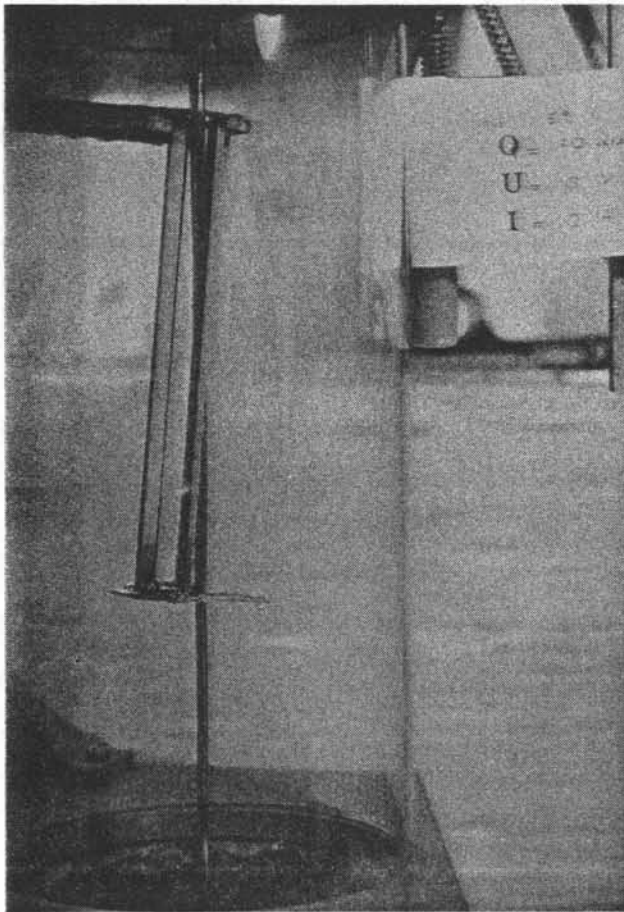


Photo 3

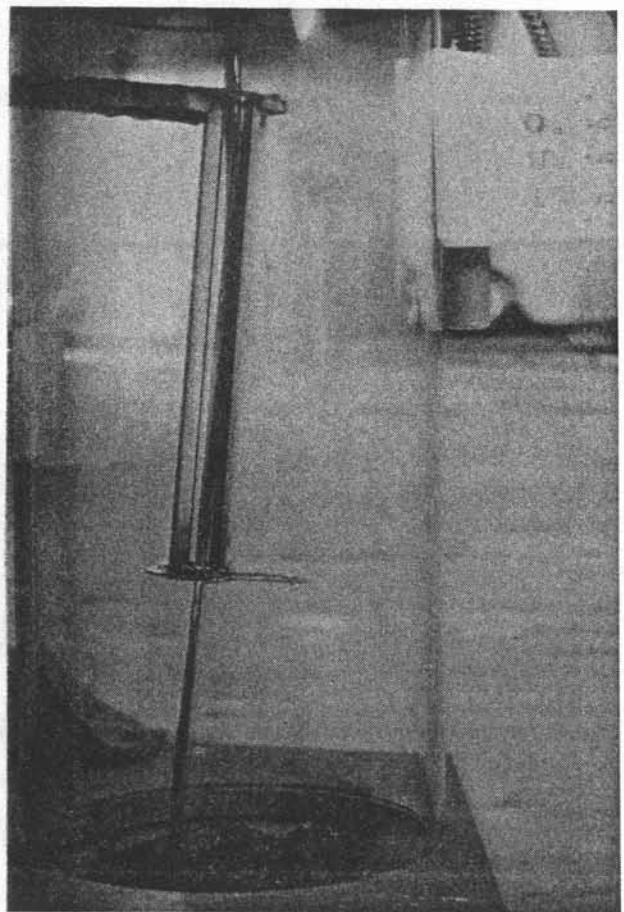


Photo 4

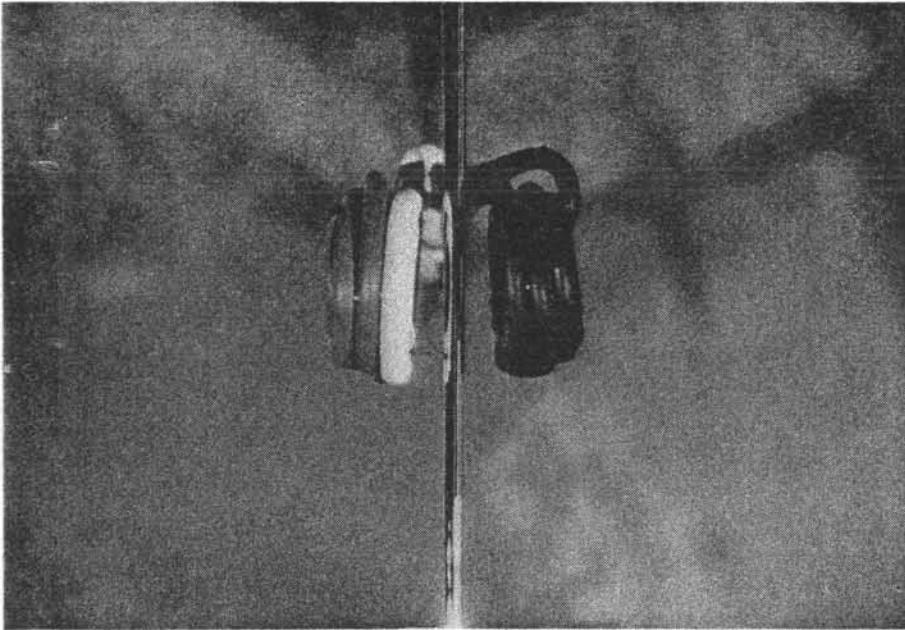


PHOTO 5

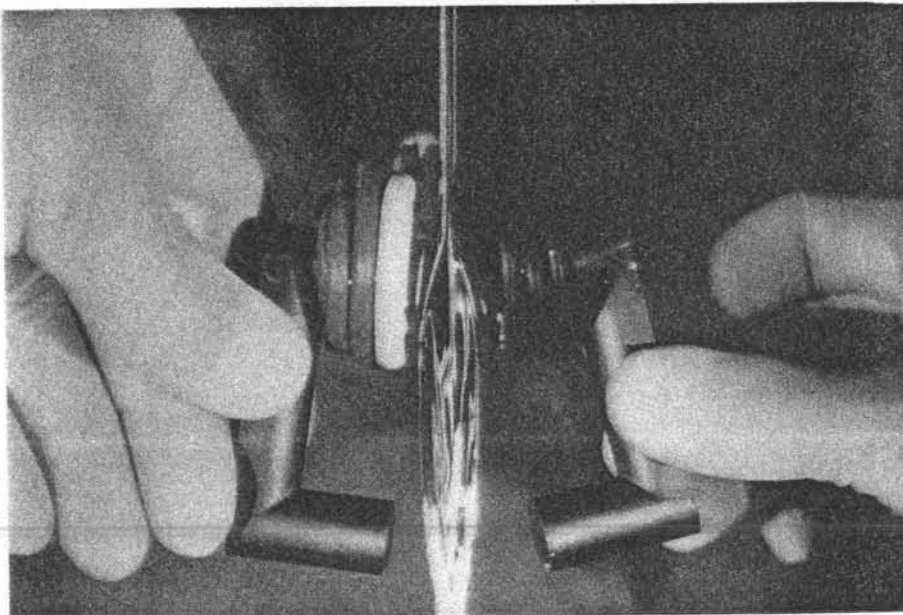


PHOTO 6

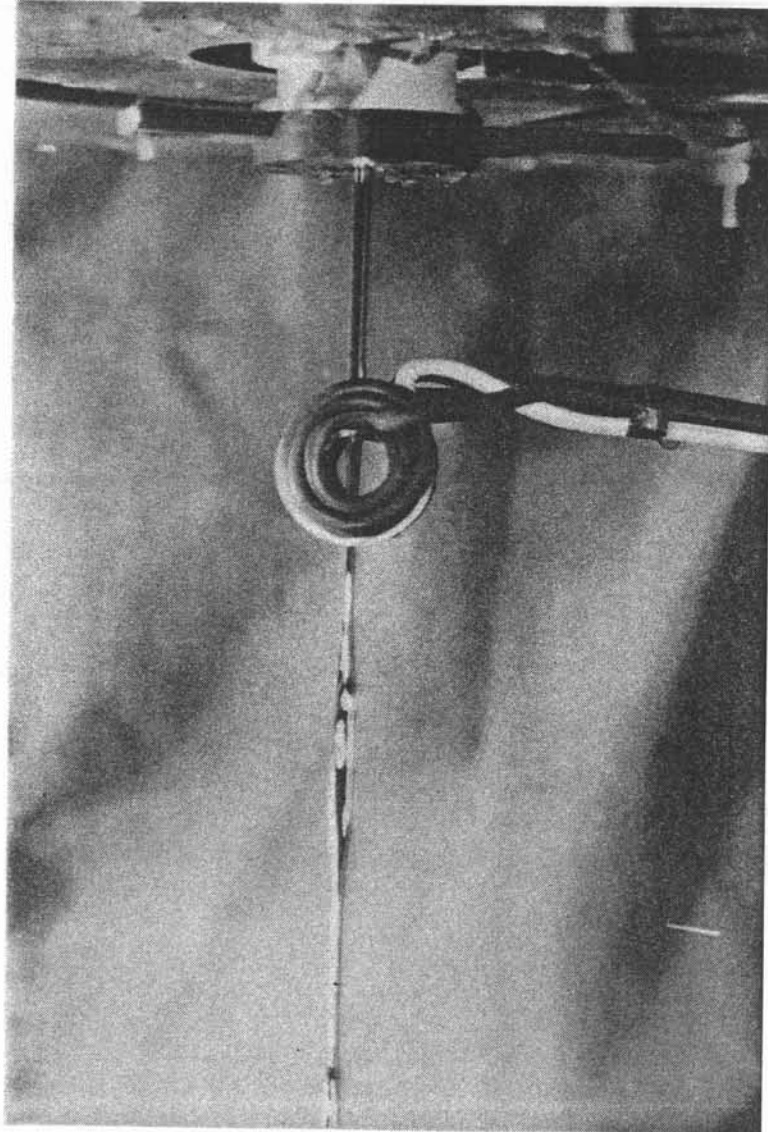


PHOTO 7

B I B L I O G R A P H I E

- (1) SAGARDIA S.R.  
    *"Multiple frequency electromagnetic levitation"*  
    Master thesis - University of Toronto (1971)  
    *"Electromagnetic levitation of large conductive loads"*  
    Ph. D. thesis - University of Toronto (1974)
- (2) SNEYD A.D. - MOFFATT H.K.  
    *The fluid dynamics of the process of levitation melting"*  
    J. Fluid Mech. (à paraître - 1982)
- (3) BRANCHER J.P. - SERO-GUILLAUME O.  
    *"Sur l'équilibre des liquides magnétiques - Application à la magnétostatique"*  
    J.M.T.A. (à paraître - 1982)
- (4) SHERCLIFF J.A.  
    *"Two-dimensional plasma equilibria"*  
    J. Plasma Physics - 21 - 2 - (1979)
- (5) GARNIER M.  
    *"Confinement, centrage et guidage électromagnétiques d'un jet de métal liquide"*  
    J. Mécanique Appliquée - 3 - 3 - (1979)
- (6) ROBERTS P.H.  
    *"An introduction to magnetohydrodynamics"*  
    Longmans - (1967)
- (7) GARNIER M.  
    *"Dynamique des métaux liquides sous l'action de champs magnétiques alternatifs. Perspectives d'application métallurgiques"*  
    Thèse de Docteur-Ingénieur, U.S.M.G. - I.N.P.G. (1977)
- (8) GARNIER M.  
    *"Stability of an interface controlled by unsteady magnetic fields"*  
    Proc. 2<sup>nd</sup> Bat Sheva Seminar on "MHD Flows and Turbulence", Israël (1978)



- (9) BIASSE J.M. - GARNIER M.  
*"Procédé et dispositif pour faciliter la soudure"*  
Brevet français n° 80-052-52 (1980)
- (10) MOFFATT H.K.  
*"Rotation of a liquid metal under the action of a rotating magnetic field"*  
Proc. 2<sup>nd</sup> Bat Sheva Seminar on "MHD Flows and Turbulence", Israël (1978)
- (11) BIASSE J.M.  
*"La lévitation électromagnétique - Une proposition d'application à la soudure"*  
Thèse de Docteur-Ingénieur, U.S.M.G. - I.N.P.G. (1981)
- (12) SHERCLIFF J.A.  
*"Liquid metal columns confined by external parallel conductors",  
Part I : Theory*  
Proc. 3<sup>rd</sup> Beer Sheva Seminar on "MHD Flows and Turbulence", Israël (1981)
- (13) ETAY J. - GARNIER M.  
*"Procédé et dispositif de type électromagnétique, pour le formage des métaux"*  
Brevet français n° 81-24-009 (1981)
- (14) ETAY J. - GARNIER M.  
*"Procédé et dispositif électromagnétiques d'élaboration de rubans et de tôles métalliques de faible épaisseur"*  
Brevet en cours de dépôt
- (15) GARNIER M. - MOREAU R.  
*"Procédé et dispositif pour diriger, en l'absence de parois, des veines métalliques liquides, notamment pour les centrer, les guider ou contrôler leur forme circulaire"*  
Brevet français n° 77-21-513 (1977)

- (17) ERNST R. - GARNIER M. - MOREAU R.

*"Etude d'un procédé électromagnétique de fabrication de barres creuses par coulée continue"*

Rapport de fin de contrat VALLOUREC - MADYLAM

- (18) ERNST R. - GARNIER M. - GIROUTRU M. - MOREAU R.  
MM. PEYTAVIN - GUEUSSIER

*"Procédé de fabrication de barres creuses par coulée continue à l'aide d'un champ magnétique et dispositif de mise en oeuvre du procédé"*

Brevet français n°

- (19) ERNST R. - GARNIER M. - GIROUTRU M. - MOREAU R.  
MM. PEYTAVIN - GUEUSSIER

*"Rotor magnétique pour la fabrication de corps creux par coulée continue"*

Brevet français en cours de dépôt

CHAPITRE II

LE CONFINEMENT ELECTROMAGNETIQUE DE  
VEINES METALLIQUES LIQUIDES

-----



## C H A P I T R E   I I

### CONFINEMENT ELECTROMAGNETIQUE DE VEINES METALLIQUES LIQUIDES

-----

Le sujet du travail exposé dans cette partie est né en 1973 d'une analyse des possibilités d'applications de procédés électromagnétiques en métallurgie, faite à l'occasion de tables rondes organisées sous les auspices de la Société Française de Métallurgie et de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique (D.G.R.S.T.). L'objectif retenu, pour ce qui nous concerne, a été l'étude de la mise au point d'un dispositif susceptible de s'adapter sans modifications importantes à une installation industrielle existante, et permettant de faire décoller des parois une veine de métal liquide (1). Un premier dispositif a été imaginé et étudié (2) que nous avons qualifié de dispositif de confinement "haute fréquence" pour des raisons qui apparaîtront clairement par la suite. De cette première étude et de l'analyse de l'influence du paramètre fréquence est apparue la possibilité intéressante d'obtenir des effets semblables sur le métal liquide avec des fréquences relativement basses, concrétisée par l'expérimentation du dispositif dit "basse fréquence".

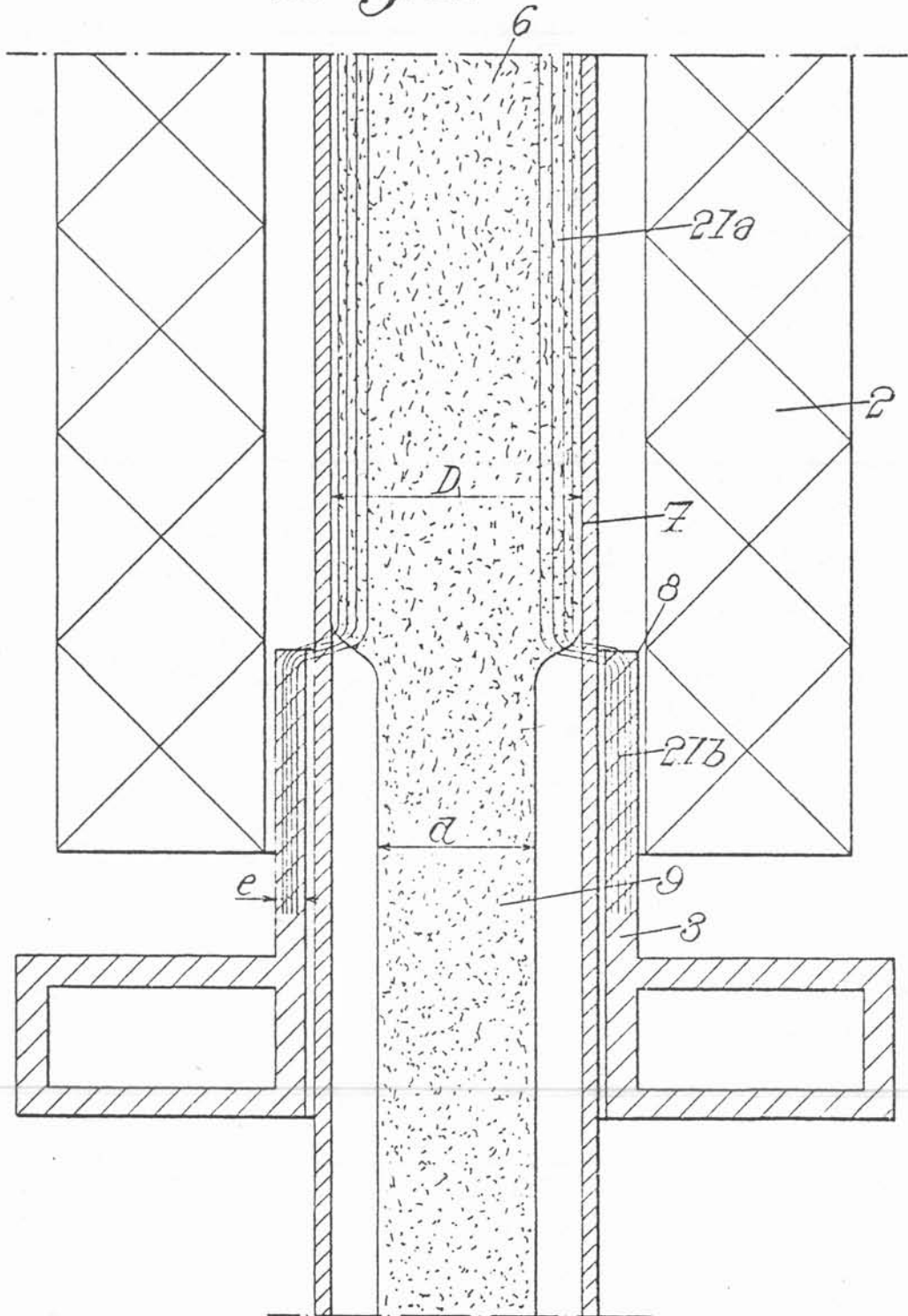
#### 1) Le dispositif de confinement électromagnétique "haute fréquence"

Il est composé (figure 1) d'une bobine inductrice cylindrique (2) et d'un écran de cuivre (3). Tous deux sont coaxiaux et placés, également de façon coaxiale, autour de la veine de métal liquide (9), initialement contenue par une paroi (7). L'écran de cuivre, refroidi par une circulation d'eau, est d'une épaisseur  $e$  inférieure à l'épaisseur de peau électromagnétique dans ce matériau à la fréquence d'utilisation du dispositif soit :

$$\mu \sigma_c \omega e^2 > 1$$

si  $\sigma_c$  désigne la conductivité électrique du cuivre et  $\omega$  la pulsation des courants circulant dans la bobine. Dans ces conditions, l'écran de cuivre se comporte comme

*Fig. 1.*



tel puisqu'il sépare une région extérieure où l'intensité du champ magnétique est imposée par l'inducteur, d'une région intérieure où le champ magnétique est nul. La fréquence d'utilisation doit être choisie de telle façon que l'épaisseur de peau dans le métal liquide de conductivité  $\sigma$  soit faible devant le rayon initial  $R$ , c'est à dire :

$$\mu \sigma \omega R^2 \gg 1$$

Dans ces conditions, les lignes de champ magnétique localisées, à l'amont de l'écran, à la périphérie du métal liquide doivent traverser la surface du métal pour pénétrer dans l'écran au niveau de l'arête supérieure (8). Avant de subir l'effet de l'écran, le métal liquide est soumis, à l'intérieur de la bobine, à un système de forces électromagnétiques centripètes qui ont essentiellement pour effet de faire apparaître une surpression  $B^2/2\mu$  dans la veine métallique ( $B$  désigne la valeur efficace du champ magnétique appliqué mesurée à la surface du métal liquide). Sur une ligne de courant, entre un point situé à l'amont de l'écran et un point situé à l'intérieur de l'écran la quantité  $P + B^2/2\mu + \rho V^2/2$  se conserve ( $P$  désigne la pression dans le fluide de masse volumique  $\rho$  et de vitesse  $V$ ). Puisque les particules fluides ressentent brusquement l'annulation de la pression magnétique lorsqu'elles pénètrent à l'intérieur de l'écran, elles doivent accroître leur vitesse, ce qui, à cause de l'invariance du débit, se traduit par une réduction de la section droite : la veine de métal liquide doit donc décoller des parois. Si  $d$  désigne le diamètre de la veine de métal liquide à l'intérieur de l'écran, le coefficient de contraction  $\alpha = d/D$  est donné par :

$$\alpha = (1 - B^2/\mu \rho V^2)^{1/4}$$

où  $V$  est la vitesse du fluide à l'aval du point de décollement. Cette vitesse est totalement indépendante du champ magnétique ; elle est fixée par la charge  $H$  de métal au-dessus du point de décollement qui se situe au niveau de l'arête supérieure de l'écran. Ainsi, le coefficient de contraction peut s'écrire :

$$\alpha = (1 - B^2/2\mu \rho g H)^{1/4}$$

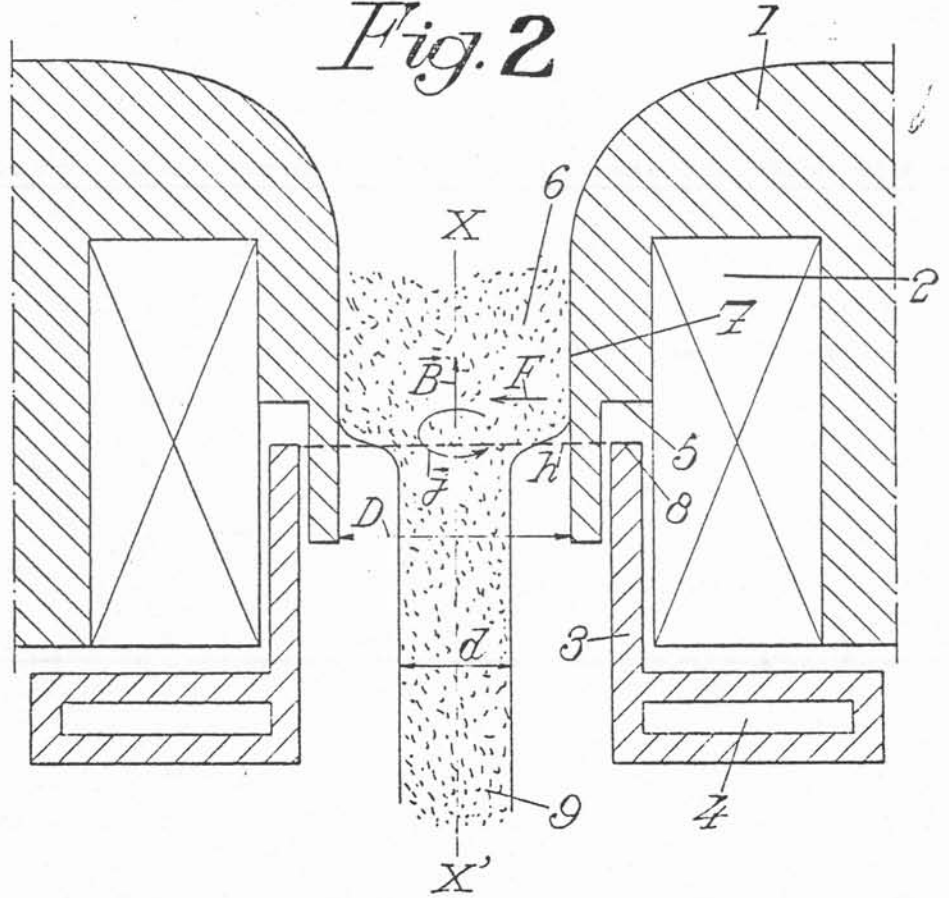
La position du point de décollement est stable. En effet si ce point remonte au-dessus de l'arête supérieure de l'écran, les particules fluides qui transitent dans la région située entre le point de décollement et l'écran ressentent l'effet du champ magnétique ; elles voient donc toujours la même pression, ce qui les oblige à conserver leur vitesse et contraint la veine métallique à revenir au contact des parois. Si, par contre, le point de décollement descend, immédiatement à l'aval de l'arête supérieure de l'écran, les particules fluides ressentent une diminution de pression qui les accélère et réduit la section droite de la veine métallique : ceci rétablit le décollement à sa position initiale.

La formule donnant le coefficient de contraction  $\alpha$  n'est pas valable lorsque  $\alpha$  devient très faible ; en particulier, il n'existe aucune valeur de  $B$ , comme le laisserait supposer la formule, pour laquelle  $\alpha$ , c'est à dire  $d$ , s'annule ( $B = (2\mu \rho g H)^{1/2}$ ). Ceci correspondrait à un blocage complet de l'écoulement, irréalisable avec un tel dispositif. Supposons, en effet, le métal liquide maintenu à l'arrêt grâce aux forces électromagnétiques. Pour de simples raisons de symétrie, qui sont à l'origine des limites de certains dispositifs de lévitation électromagnétique (3), le champ magnétique est nul à l'intersection de l'axe de l'inducteur avec la surface libre du métal. En ce point aucune force électromagnétique n'apparaît qui puisse supporter le métal liquide ; seules les forces de tension superficielle seraient capables de pallier cette déficience pour des valeurs de  $H$  extrêmement faibles (4).

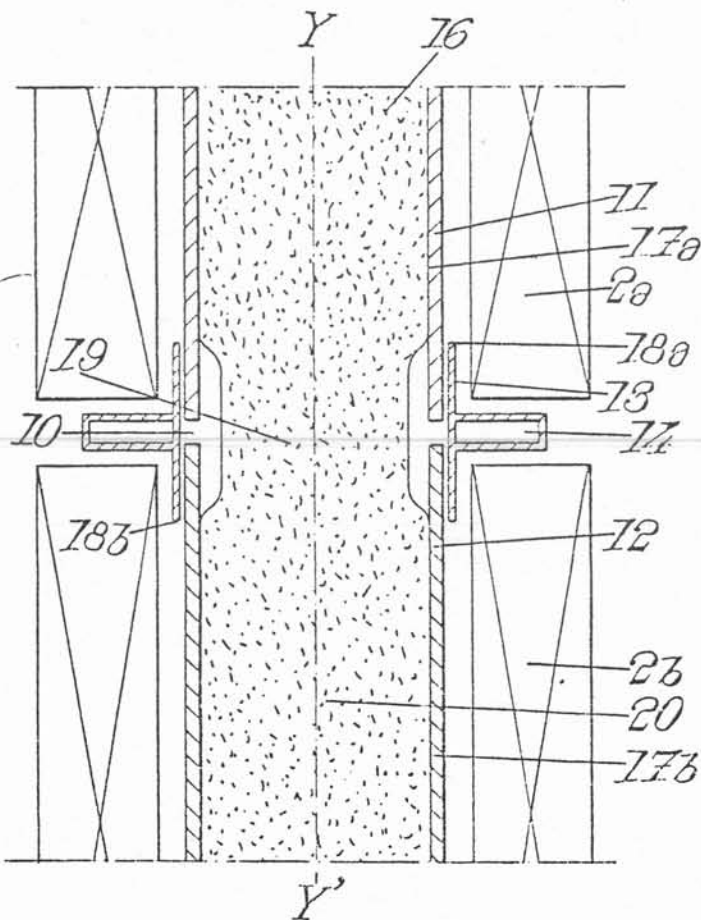
Les applications possibles du dispositif de confinement électromagnétique "haute fréquence" (figure 2) sont exposées dans les brevets (5) (6) destinés à le protéger. Elles concernent en particulier la possibilité d'augmenter la durée de vie des busettes matérielles très coûteuses, usinées dans des matériaux réfractaires, en réduisant les surfaces de contact avec le métal liquide très agressif. En outre, le contrôle de la valeur du coefficient de contraction  $\alpha$  par l'intermédiaire de  $B$ , donc du courant dans l'inducteur, permet le contrôle du débit de métal liquide puisque la vitesse est maintenue constante dans une section droite dont l'aire peut être imposée de l'extérieur. La réversibilité du phénomène de décollement peut être exploitée pour réaliser (figure 2) la jonction, sans aucun risque de fuite, entre deux conduits non jointifs véhiculant du métal liquide.



*Fig. 2*



*Fig. 3*



Au cours de l'expérimentation effectuée en laboratoire avec du mercure (7), des essais ont été réalisés dans le but de préciser la valeur à adopter pour la fréquence des courants inducteurs, dont la plage de variation, seulement limitée par des conditions portant sur les paramètres d'écran, reste très vaste. De l'analyse qui a été faite est apparue la possibilité d'obtenir le décollement contrôlé de la veine de métal liquide sans avoir recours à un écran de cuivre, en choisissant la fréquence de façon judicieuse. Celle-ci doit être telle que l'épaisseur de peau dans le métal liquide soit comparable au rayon de la veine métallique avant décollement. Les fréquences utilisées sont donc beaucoup plus basses que les fréquences nécessaires à l'obtention du décollement avec le dispositif précédent : ceci justifie les dénominations respectives de ces deux dispositifs.

## 2) Le dispositif de confinement électromagnétique "basse fréquence"

Il est très simple sur le plan technologique puisqu'il est constitué d'un inducteur seul, simple enroulement en spirale de tube de cuivre (photo 1) (8) . Cette géométrie d'inducteur que nous avons expérimentée avec succès n'est sans doute pas la géométrie optimale pour atteindre l'objectif souhaité : elle a permis de montrer la faisabilité du procédé, mais il ne nous est pas possible, actuellement, d'affirmer que cette géométrie conduit au meilleur effet avec une puissance électrique minimale. Nous reviendrons plus loin sur cette notion d'optimum et sur les difficultés de sa recherche.

### 2.1. Les observations expérimentales

Les expériences ont été réalisées avec une veine de mercure s'écoulant verticalement dans un tube de verre de 20 mm de diamètre intérieur et 25 mm de diamètre extérieur. La spire intérieure de l'inducteur, qui en comporte cinq, est directement au contact du tube de verre. L'inducteur est placé horizontalement de façon telle que son plan inférieur soit au voisinage de l'extrémité du tube de verre. Les condensateurs d'accord du circuit oscillant sont adaptés pour fixer la fréquence de résonance à 3K Hz ( $\delta/R = 0,9$  ). Le champ magnétique maximal obtenu grâce au générateur de 40 Kw qui alimente l'inducteur a une valeur efficace maximale de 2000 Gauss.

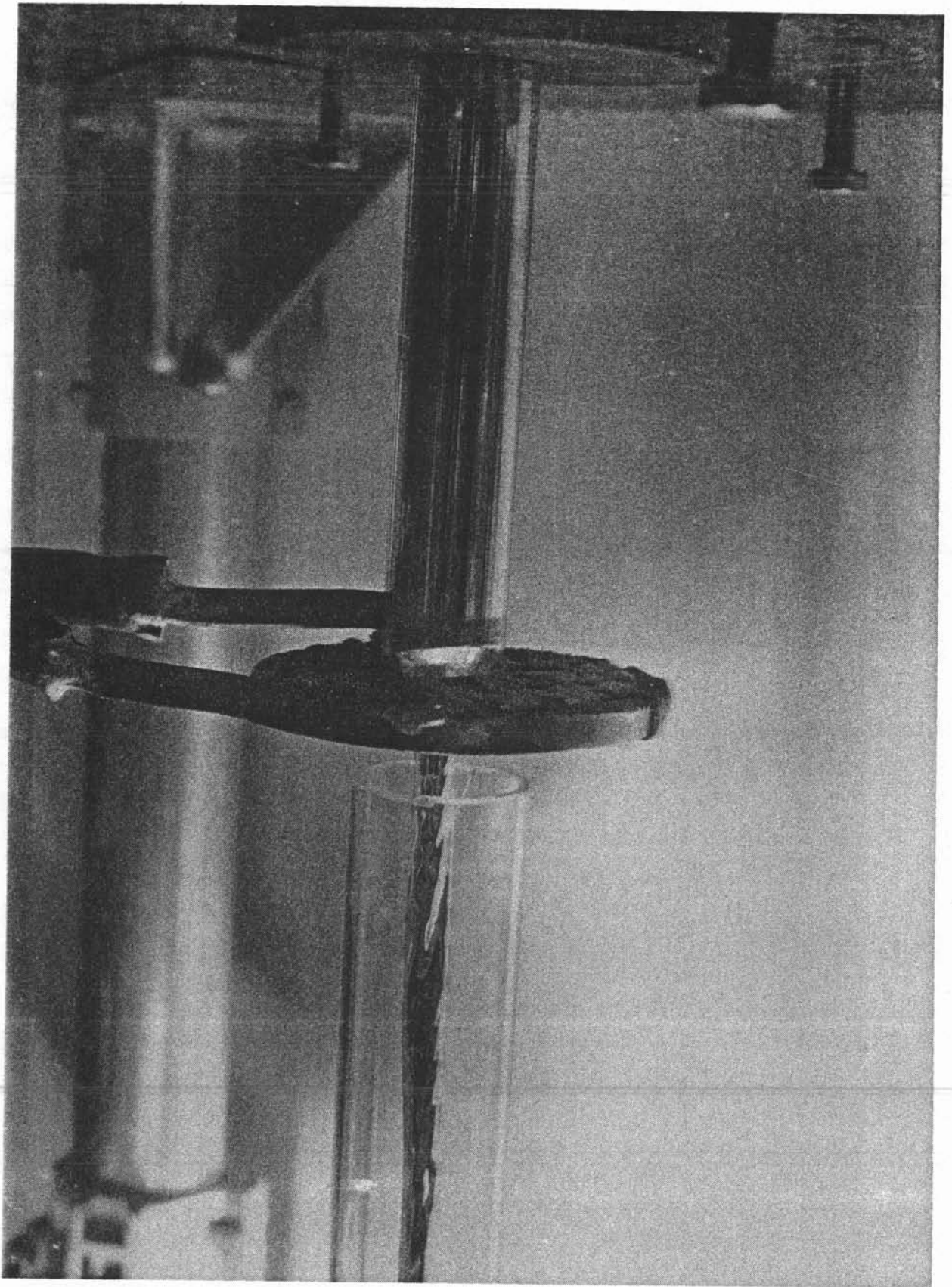


PHOTO 1

L'observation du confinement est très facile avec des charges de métal liquide faibles (quelques cms) conduisant avec les champs magnétiques que nous pouvons produire à des contractions importantes ( $\alpha \sim \frac{1}{3}$ ). Le phénomène se produit de la façon suivante : la veine métallique libre formée à la sortie du tube de verre est la première affectée par la présence du champ magnétique. Lorsque l'intensité du courant électrique dans l'inducteur croît à partir de zéro, le diamètre de la veine se réduit mais le contact entre le mercure et la paroi de verre demeure. Ensuite le décollement se produit, la surface libre remonte à l'intérieur de la bobine inductrice et la ligne de décollement s'immobilise au niveau du plan supérieur de celle-ci (photos 2 et 3). La veine de métal liquide est alors parfaitement centrée (photo 4). La position de la ligne de décollement et la forme d'équilibre de la veine métallique sont très stables comme nous avons pu le constater en superposant une pulsation à l'écoulement moyen : ceci entraînait une oscillation de la ligne de décollement autour de sa position d'équilibre mais ne forçait pas la veine métallique à recoller aux parois. Nous avons aussi testé la stabilité en effectuant une succession de translations rapides de l'inducteur parallèlement à lui-même sur une amplitude de l'ordre du centimètre. Au cours de ces translations, la ligne de décollement accompagnait l'inducteur de façon à ce que leur position relative demeure inchangée. Ainsi avec des charges faibles conduisant à un effet de confinement très marqué, la configuration obtenue est très stable. Cependant les conditions d'obtention du décollement, directement liées à des conditions de stabilité de la veine métallique, soumise à l'action du champ magnétique sont complexes : nous tenterons de les cerner dans le paragraphe suivant.

De même qu'avec le dispositif précédent, la vitesse dans la zone contractée de la veine métallique est indépendante du champ magnétique et ne dépend que de la hauteur de métal liquide qui surmonte cette zone. La régulation de débit, par le contrôle du coefficient de contraction  $\alpha$ , est donc également possible. La valeur de  $\alpha$ , exprimée en fonction de la valeur efficace du champ magnétique, précédemment calculée ne peut être retenue dans le cas présent puisque l'épaisseur de peau n'est plus très faible devant le rayon de la veine de métal et puisque la pression magnétique n'est plus quasi uniforme dans une section droite. D'un bilan global, par tranche, prenant en compte la pression moyenne dans chaque section droite, on peut déduire la valeur du coefficient de contraction :

$$\alpha = \left( 1 - C_f \frac{B^2}{2\mu \rho g H} \right)^{1/4}$$



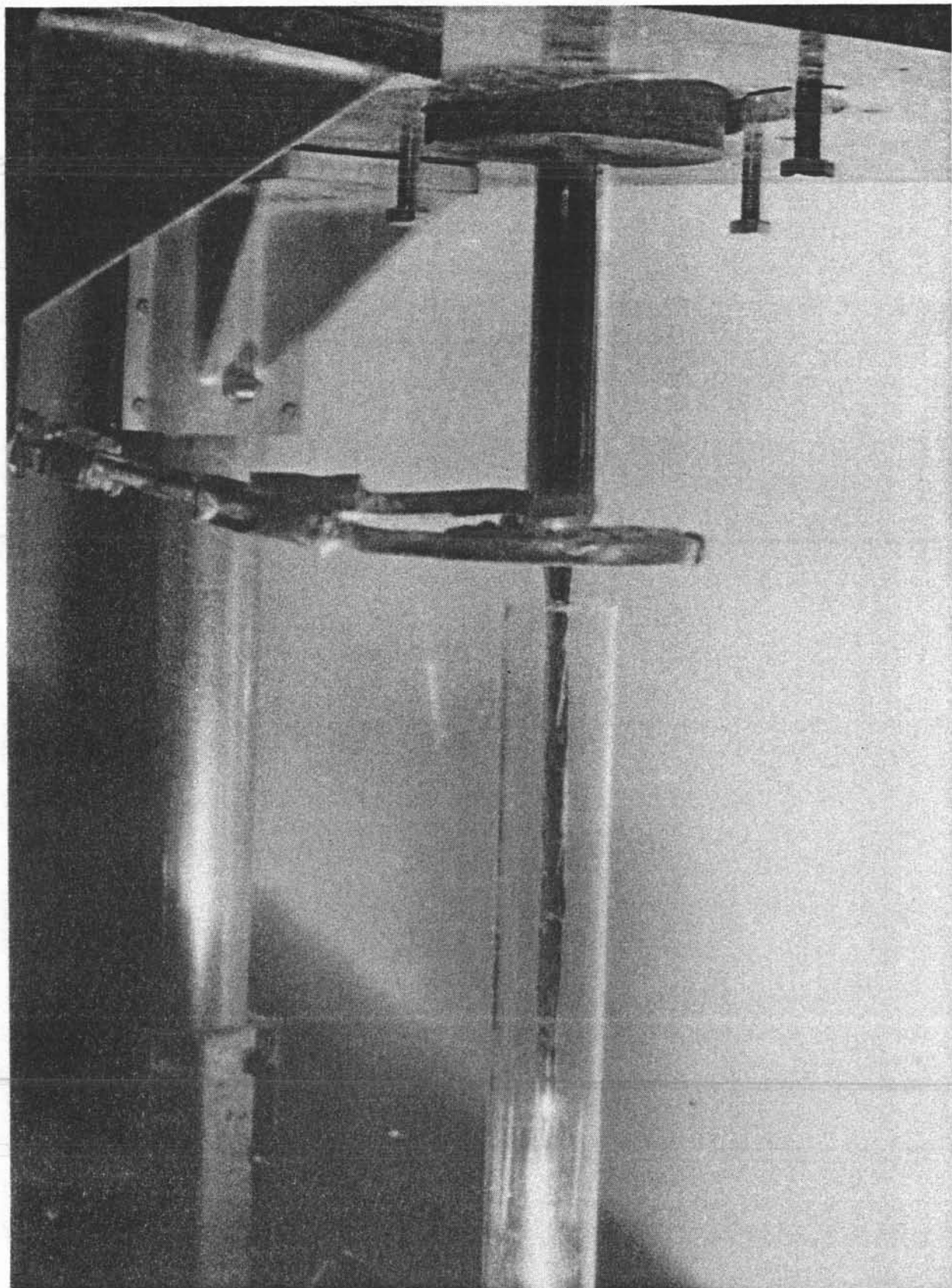


PHOTO 2

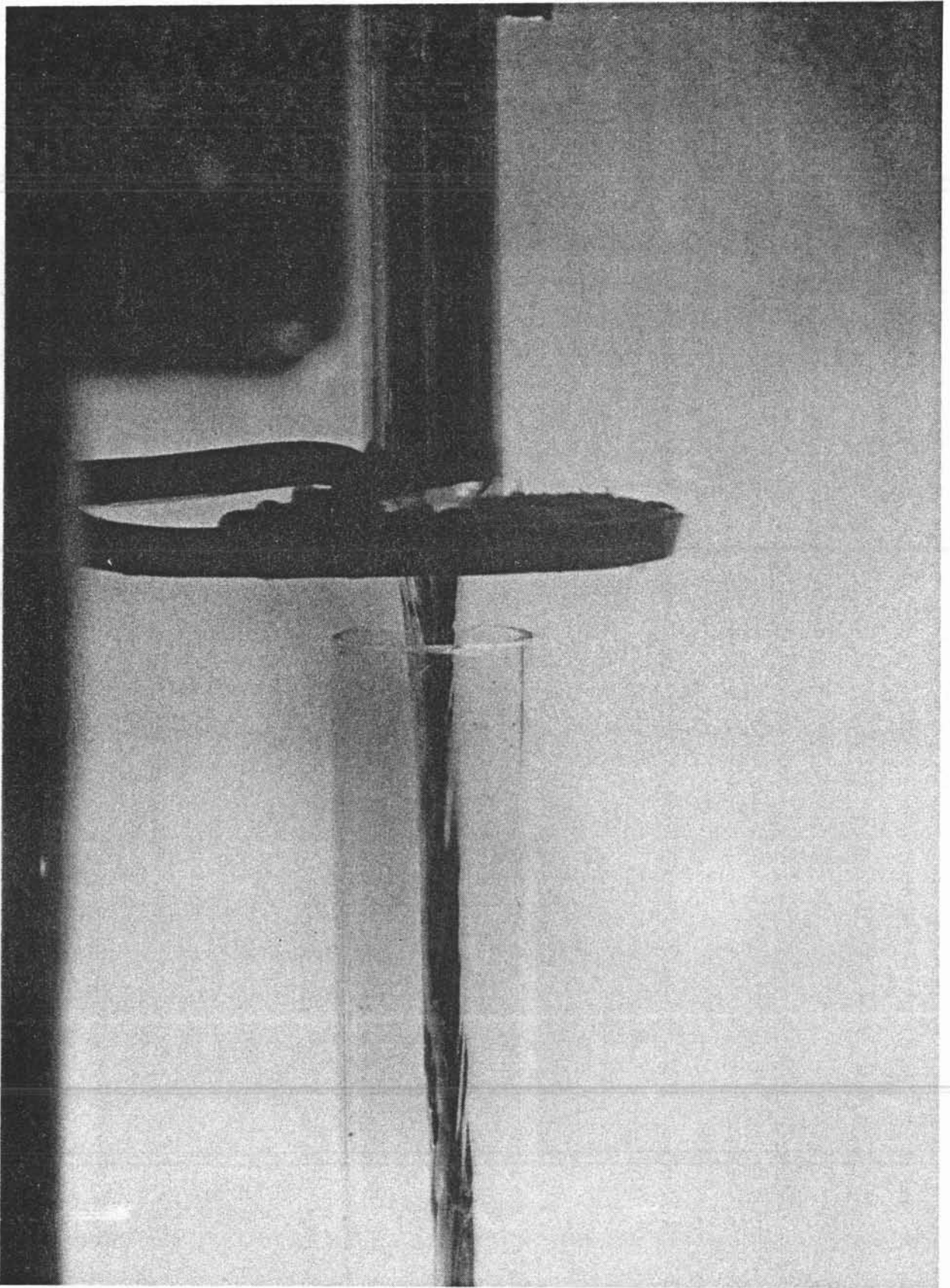
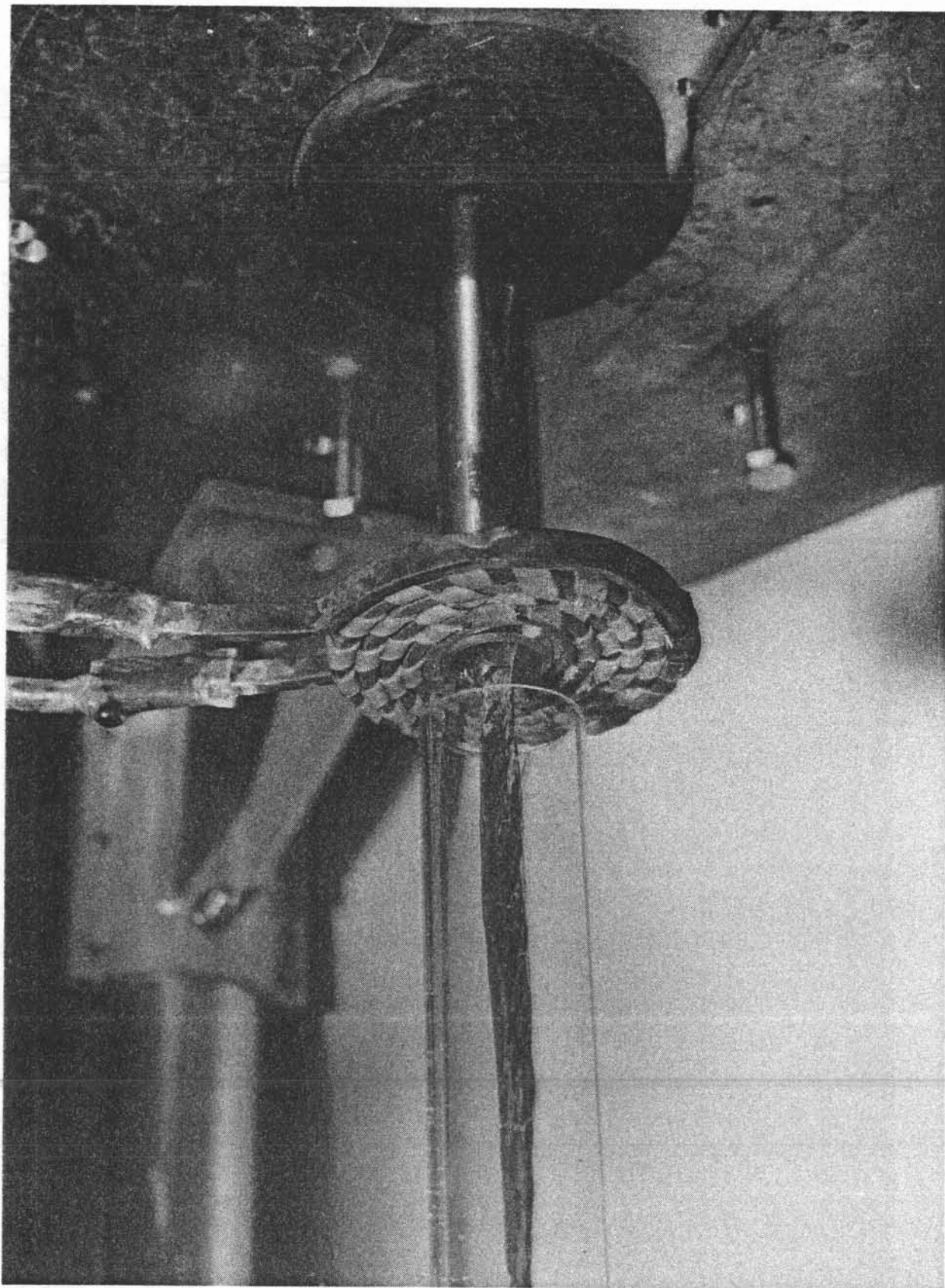


PHOTO 3



P H O T O   4



$C_f$  étant un coefficient dépendant de la fréquence, prenant en compte la répartition de pression dans une section droite,  $C_f$  peut être approché, par la formule :

$$C_f = 1 - (1 - e^{-\sqrt{R\omega}}) / \sqrt{R\omega}$$

avec :  $R_\omega = \mu \sigma \omega R^2$

## 2.2. Interprétation du phénomène

Lorsque l'épaisseur de peau  $\delta$  est très faible devant le rayon  $R$  de la veine de métal liquide ( $R_\omega \gg 1$ ), quelles que soient les variations de  $R$ , le champ magnétique reste nul au centre de la veine métallique et la pression magnétique qui y règne demeure inchangée. Par contre lorsque  $\delta$  est du même ordre de grandeur que  $R$ , toute perturbation qui affecte la surface du métal modifie la valeur du champ magnétique sur l'axe de la veine métallique. Dans ce cas toute réduction de section réduit la différence existant entre les champs magnétiques sur l'axe et à la surface de la veine et diminue la pression magnétique moyenne dans la section : à la limite, lorsque  $R$  devient petit devant  $\delta$ , le métal liquide ne ressent plus le champ magnétique auquel il devient transparent.

Considérons la veine métallique libre qui s'écoule à partir de l'extrémité du tube de verre. Les particules fluides voient le champ magnétique décroître lorsqu'elles s'éloignent de l'inducteur. Elles doivent en conséquence adapter à chaque instant leur vitesse de telle façon que la charge totale demeure constante dans le liquide malgré la décroissance de la pression magnétique. Entre le rayon d'une section droite située à l'aval de l'inducteur où le champ magnétique est nul, et celui d'une section droite située dans l'inducteur il doit y avoir un rapport fixé par l'intensité du champ magnétique appliqué et la charge du métal liquide considéré. Ce rapport est nécessairement plus faible que celui correspondant à la contraction résultant de l'accélération du jet sous l'effet de la pesanteur. Une réduction de section se produit donc qui se propage sur toute la hauteur de la veine libre dans laquelle la peau électromagnétique devient localement plus grande que le rayon. Il en résulte une augmentation du champ magnétique sur l'axe et donc une diminution de la pression magnétique dans le métal liquide. Le phénomène de contraction se poursuit ainsi jusqu'à ce que la constance de la charge soit obtenue



dans chaque section. La contraction gagne l'extrémité du tube de verre où le décollement, retardé par les forces de tension superficielle, se produit très brusquement. La perturbation induite alors sur la surface libre est alors si vive que la ligne de décollement remonte à l'intérieur de la bobine où aucune position stable n'existe puisque tous les plans horizontaux sont équivalents et correspondent à des positions possibles. Seul le voisinage du plan supérieur de l'inducteur permet à la ligne de décollement de s'immobiliser : dans toute position plus en amont, les forces électromagnétiques plus faibles à cause de la décroissance du champ magnétique hors de la bobine, seraient incapables d'assurer l'équilibre de la surface libre du métal liquide qui reviendrait au contact de la paroi.

### 3) Considérations sur la stabilité du phénomène de confinement électromagnétique basse fréquence.

Les paramètres qui régissent le confinement électromagnétique sont très nombreux : par exemple la charge de métal liquide, le diamètre de l'orifice, la géométrie de l'inducteur, la fréquence des courants électriques qui l'alimente ... Il importe donc de s'interroger pour savoir si, dans l'espace des paramètres, le domaine de stabilité du confinement électromagnétique recouvre entièrement le domaine de définition de ces paramètres, ou si pour certaines valeurs de ceux-ci le phénomène est difficile, ou impossible, à obtenir. L'analyse précise des conditions de stabilité, faite de façon classique, est délicate puisqu'elle repose sur la détermination de l'équation de la surface libre d'équilibre de la veine métallique liquide. Le problème de frontière libre rencontré ici présente un maximum de complexité : en effet, l'épaisseur de peau électromagnétique n'est pas petite devant le rayon de la veine métallique ; de plus, les forces électromagnétiques sont en compétition avec la gravité, les forces d'inertie et les forces de tension superficielle. La présence d'une paroi et l'existence d'un point de décollement, dont la position est à déterminer, autour duquel les conditions aux limites sur la pression sont de nature différente ajoute encore à la difficulté du problème. Nous allons donc nous attacher à dégager un critère de stabilité au moyen d'une analyse très globale ignorant les détails de la géométrie de la veine métallique confinée, aussi bien que les caractéristiques précises de l'inducteur.

Considérons le schéma suivant : une paroi infinie dans laquelle est ménagée un orifice de rayon  $R$  est surmontée d'une hauteur  $H$  de métal liquide.

Une bobine inductrice de rayon intérieur  $R_0$  est placée sous la paroi, à une distance  $d$  de celle-ci, de façon concentrique à l'orifice circulaire. Le champ magnétique engendré par cet inducteur est tel qu'il crée localement une pression  $P$  à l'intérieur de la veine libre issue de l'orifice. Si  $P$  désigne la pression magnétique moyenne dans une section droite, le rayon  $r$  de la veine métallique à une cote  $z$  fixée, comptée à partir de la surface libre, est tel que :

$$P(z) - \rho g z + \frac{\rho Q^2}{2\pi^2 r^4} = 0$$

si  $Q$  désigne le débit de métal liquide qui traverse l'orifice.

De façon intuitive, comme le confirmera une analyse de stabilité locale effectuée dans une géométrie beaucoup plus simple (cf. chapitre III), ce sont les perturbations de la surface libre de petite longueur d'onde qui ressentent le plus l'effet du champ magnétique appliqué, à cause du flux magnétique intercepté par les ondulations formées sur la surface. Les courants induits associés à ce flux sont à l'origine de forces de rappel qui tendent à éliminer la cause qui les a produits, c'est à dire la perturbation. Par contre les vagues de grande longueur d'onde qui peuvent se former sur la surface libre, assimilables à des translations d'ensemble de la surface, ne donnent pas lieu, lorsque leur amplitude reste faible, à des modifications importantes du flux magnétique et sont par conséquent celles qui peuvent être à l'origine d'une instabilité de la veine métallique confinée. Nous allons donc porter notre attention sur ce type de perturbations et les considérer comme des déplacements en bloc de la surface suivant sa normale. Soient  $\delta z$  et  $\delta r$  l'écart entre la position d'équilibre et la position après perturbation d'un point donné de la surface libre. Il résulte de cet écart une variation de la pression interne (ou hydraulique) de la veine métallique :

$$\delta P^* = \delta \left( \rho g z - \frac{\rho Q^2}{2\pi^2 r^4} \right) = \rho g \delta z + \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 r^4} \delta r$$

Il en résulte également une variation  $\delta P$  de la pression magnétique qui doit, pour assurer la stabilité, pouvoir contrer  $\delta P^*$ . La condition de stabilité s'écrit donc :

$$\frac{\delta P}{\delta r} \geq \rho g \frac{\delta z}{\delta r} + \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 r^5}$$

Pour les perturbations prises en compte  $\delta z$  et  $\delta \kappa$  sont reliés à la dérivée  $(\partial z / \partial \kappa)_{eq.}$  de l'équation  $z = z_0$  d'une méridienne de la surface libre à l'équilibre par :

$$\frac{\partial z}{\partial \kappa} \left( \frac{\partial z}{\partial \kappa} \right)_{eq.} = -1$$

La condition de stabilité prend alors la forme :

$$- \rho g / \left( \frac{\partial z}{\partial \kappa} \right)_{eq.} + \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 \kappa^5} \leq \frac{\delta P}{\delta \kappa}$$

De façon cohérente avec le type de perturbations retenues, qui ne ressentent que faiblement l'effet du champ magnétique, cette condition est remplacée par une condition plus sévère qui consiste à admettre  $\frac{\delta P}{\delta \kappa} = 0$ , soit :

$$- \frac{\rho g}{\left( \frac{\partial z}{\partial \kappa} \right)_{eq.}} + \frac{2\rho Q^2}{\pi^2 \kappa^5} \leq 0$$

ou encore :

$$\left( \frac{\partial z}{\partial \kappa} \right)_{eq.} \leq \frac{\pi^2 g \kappa^5}{2Q^2}$$

Puisque  $(\partial z / \partial \kappa)_{eq.}$  décroît constamment depuis l'orifice ( $\kappa = R$ ) lorsque  $z$  augmente, c'est précisément à l'orifice que cette condition sera la plus difficile à remplir. Ainsi la règle pratique pour l'obtention d'un confinement stable est la suivante :

$$\left( \frac{\partial z}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R} \leq \frac{\pi^2 g \kappa^5}{2Q^2}$$

Puisque, à l'équilibre  $z = \frac{P}{\rho g} + \frac{Q^2}{2\pi^2 g \kappa^4}$

$$\left( \frac{\partial z}{\partial \kappa} \right)_{eq.} = \frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_s - \frac{2Q^2}{\pi^2 g \kappa^5}$$

si  $(\frac{\partial P}{\partial \kappa})_s$  désigne la dérivée prise sur la surface; la condition à vérifier s'écrit donc :

$$\frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R} \leq \frac{2Q^2}{\pi^2 g R^5} + \frac{\pi^2 g R^5}{2Q^2}$$

L'élimination du débit  $Q$  exprimé en fonction de  $H$  et de  $P_1$ , pression au niveau de l'orifice, conduit à :

$$\frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R} \leq \frac{4}{R} \left( H - \frac{P_1}{\rho g} \right) + \frac{R}{4 \left( H - \frac{P_1}{\rho g} \right)}$$

Le coefficient de contraction  $\alpha$ , rapport entre le rayon de la veine métallique à l'aval de l'inducteur, dans une région où l'effet du champ magnétique s'annule, et le rayon de l'orifice est lié à  $P_1$  par :

$$\alpha^4 = 1 - \frac{P_1}{\rho g H}$$

Aussi la condition de stabilité s'exprime-t-elle simplement sous la forme :

$$\frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R} \leq \frac{4H \alpha^4}{R} + \frac{R}{4H \alpha^4}$$

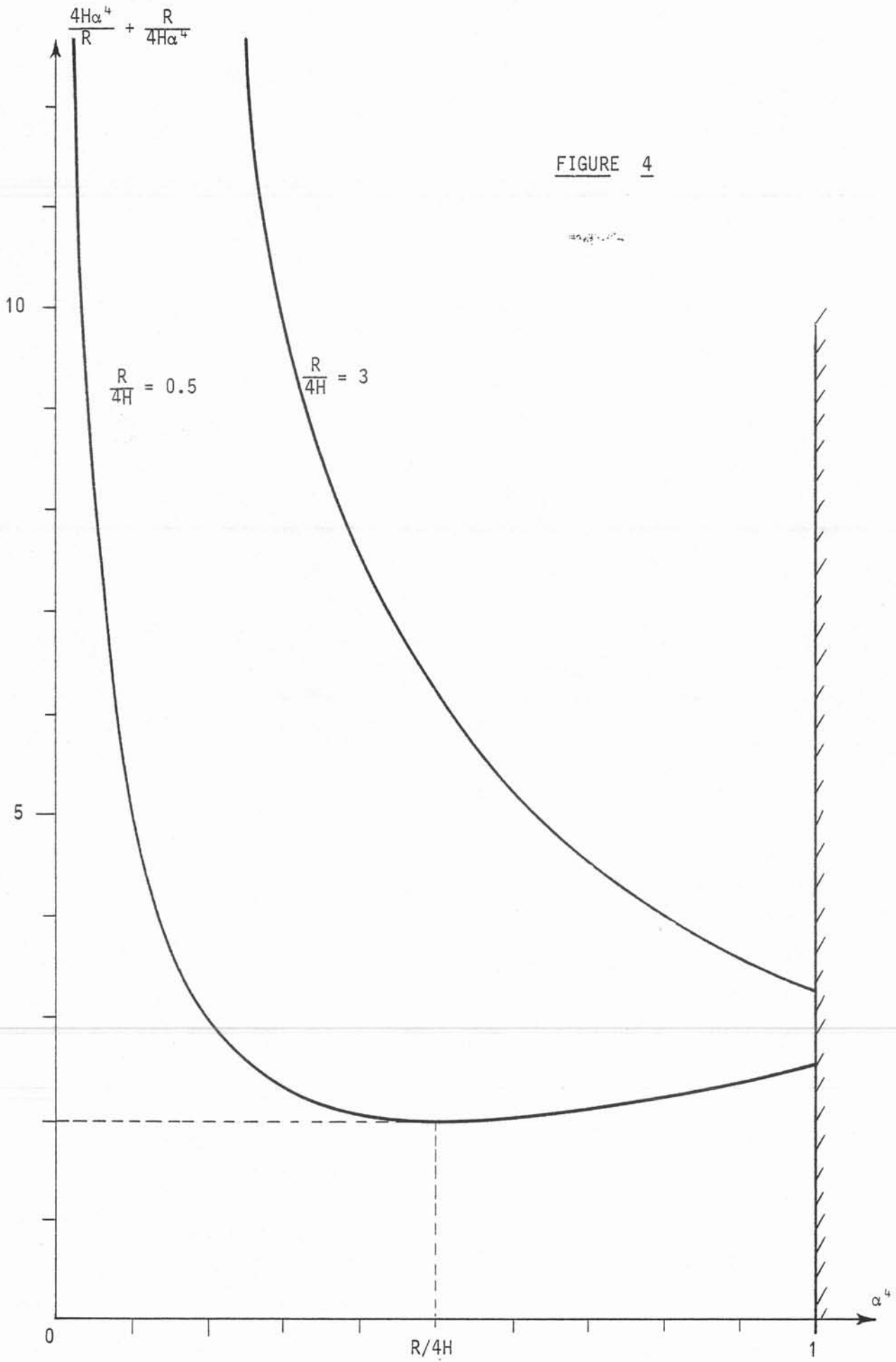
La stabilité peut être obtenue pour tout coefficient de contraction  $\alpha \in [0,1]$  si  $\frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R}$  reste inférieur au minimum du membre de droite considéré comme une fonction de  $\alpha$ . Deux cas se présentent alors (figure 4) :

- le cas des fortes charges  $\frac{R}{4H} < 1$

la valeur minimum du deuxième membre est alors égale à 2 obtenue pour  $\alpha = \left( \frac{R}{4H} \right)^{1/4}$ . La condition de stabilité se réduit alors à :

$$\frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R} \leq 2$$

FIGURE 4



- le cas des faibles charges  $\frac{R}{4H} > 1$

dans l'intervalle de variation du coefficient de contraction, le deuxième membre est strictement décroissant et atteint son minimum  $(= \frac{4H}{R} + \frac{R}{4H})$  pour  $\alpha = 1$ . La valeur de ce minimum est d'autant plus élevée que la charge H est plus faible. La condition de stabilité s'écrit dans ce cas :

$$\frac{1}{\rho g} \left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R} \leq \frac{4H}{R} + \frac{R}{4H}$$

avec

$$\frac{4H}{R} + \frac{R}{4H} > 2$$

La stabilité du confinement est très facilement assurée si la contrainte imposée à  $\left( \frac{\partial P}{\partial \kappa} \right)_{\kappa=R}$  est faible, c'est-à-dire si la plage de variation qui est accordée à ce paramètre est large. Ainsi il apparaît nettement que le confinement est plus stable, et donc plus facile à réaliser, avec des faibles charges. Dans ce cas, la stabilité est d'autant meilleure que le confinement est important (forte contraction), c'est donc l'amorce du décollement de la veine métallique qui risque alors d'être problématique. Dans le cas de fortes charges le confinement le moins stable correspond à un coefficient de contraction  $\alpha = \left( \frac{R}{4H} \right)^{1/4}$ . Ce résultat est en accord avec les observations expérimentales : les difficultés pour obtenir et maintenir le décollement d'une veine de mercure avec des charges importantes ont toujours été grandes, alors qu'avec de faibles charges le confinement a toujours été aisément obtenu et maintenu, même lorsque la veine métallique était soumise à des perturbations importantes (écoulement pulsé, translations de l'inducteur). Dans toutes les installations industrielles qui peuvent faire l'objet d'une application du confinement électromagnétique (régulation du débit à la sortie d'une poche de coulée par exemple), la charge de métal liquide est toujours grande devant le rayon des busettes de coulée  $(R/4H \leq 1/50)$ . Nous sommes donc dans le cas défavorable vis à vis de la stabilité de la veine métallique.

#### 4) Les perspectives d'applications industrielles

La grande simplicité sur le plan technologique du dispositif de confinement électromagnétique "basse fréquence", la facilité de son insertion sans modification importante dans une installation industrielle existante, ainsi que la démonstration expérimentale du phénomène effectuée en laboratoire a suscité l'intérêt de plusieurs industriels métallurgistes. La régulation du débit d'une veine de métal fondu, envisageable grâce à la possibilité d'asservir à une consigne donnée l'intensité du courant électrique dans l'inducteur, est, de toutes les applications possibles du dispositif, la plus séduisante. Des possibilités de développement en site industriel du procédé électromagnétique pour cette application particulière sont actuellement étudiées, notamment en collaboration avec l'I.R.S.I.D. (Institut de Recherche de la Sidérurgie) et avec le Centre de Recherche de Pont à Mousson (9) (10) .

Le transfert dans le secteur aval, du dispositif électromagnétique dont la faisabilité a été prouvée en laboratoire, ne peut être accompli qu'au prix d'un certain nombre d'études complémentaires. Il est clair que c'est l'inducteur, et lui seul, qui doit faire l'objet d'une optimisation, au sens le plus large du terme. Tout d'abord il importe de déterminer quelle est la géométrie optimale de l'inducteur capable de produire un champ magnétique d'intensité fixée, dans une région précise, en consommant le minimum possible de puissance active. Ce premier problème est complexe : les spires d'un inducteur interagissent électriquement les unes avec les autres et la distribution de courant dans celles-ci s'écartent de la distribution uniforme (11) ; prédire, pour une fréquence donnée, la

résistance d'un inducteur comportant plusieurs spires n'est donc pas chose aisée. Le refroidissement des conducteurs véhiculant généralement des intensités de l'ordre du kiloampère est indispensable et le problème se pose de répartir astucieusement dans l'espace, circuit électrique et circuit de refroidissement associés pour obtenir la meilleure disposition vis à vis de l'intensité du champ magnétique et de la puissance à fournir. L'expérimentation d'inducteurs menée en parallèle avec le calcul de la distribution du courant dans les spires en exploitant des méthodes numériques doit pouvoir permettre de définir une géométrie voisine de la géométrie optimale. Cependant, cette géométrie, optimisée vis à vis de la puissance à fournir, peut ne pas permettre de vérifier la condition impérative de stabilité de la veine métallique, contrôlée électromagnétiquement, selon laquelle la variation radiale de la pression magnétique induite dans la veine métallique au voisinage du point de décollement ne doit pas excéder une valeur limite. Cette condition beaucoup plus délicate à appréhender est à prendre en compte avant toutes les autres dans la définition géométrique des inducteurs. La pression magnétique induite dans le métal liquide au voisinage du point de décollement est étroitement liée à la forme de la surface libre dans cette région. Localement, ce sont essentiellement les forces de tension superficielle qui imposent la forme de la surface libre au point de raccordement entre le métal liquide, l'atmosphère ambiant et la busette matérielle : ainsi la nature même de ces trois milieux en présence peut elle avoir une influence non négligeable, voire importante, sur l'obtention de la condition de stabilité et il importe de ne pas ignorer ce dernier point dans la recherche de l'optimisation du procédé.



B I B L I O G R A P H I E

- (1) GARNIER M. - MOREAU R.  
*"Confinement électromagnétique des métaux liquides"*  
Contrat D.G.R.S.T. n° 74-7-1151 (1976)
- (2) GARNIER M.  
*"Dynamique des métaux liquides sous l'action de champs magnétiques alternatifs - Perspectives d'applications métallurgiques"*  
Thèse de Docteur-Ingénieur - U.S.M.G. - I.N.P.G. (1977)
- (3) BIASSE J.M.  
*"La lévitation électromagnétique - Une proposition d'application à la soudure"*  
Thèse de Docteur-Ingénieur - U.S.M.G. - I.N.P.G. (1981)
- (4) NAIDENOV A.F.  
*"Problèmes liés à l'augmentation des quantités de liquides conducteurs confinés dans des creusets électromagnétiques"*  
Problèmes de M.H.D. - vol. 3 - RIGA (U.R.S.S.) (1963)
- (5) GARNIER M. - MOREAU R.  
*"Dispositif électromagnétique de confinement des métaux liquides"*  
Brevet Français n° 75-21-05 (1975)
- (6) GARNIER M. - MOREAU R.  
*"Dispositif électromagnétique de confinement des métaux liquides pour réaliser une régulation de débit"*  
Brevet Français n° 77-21-121 (1977)
- (7) GARNIER J.  
*"Magnetodynamique des liquides : quelques études appliquées"*  
Rapport D.E.A. - Grenoble (1978)
- (8) GARNIER J. - GARNIER M. - MOREAU R.  
*"Procédé et dispositif pour réaliser le confinement des métaux liquides par mise en oeuvre d'un champ électromagnétique"*  
Brevet Français n° 79-14-011 (1979)

(9) GARNIER M.

*"Détermination des caractéristiques électriques d'une installation de confinement électromagnétique pour l'acier liquide"*

Contrat I.R.S.I.D. - I.N.P.G. - A.N.V.A.R. (1980)

(10) GARNIER M.

*"Etude et réalisation d'un inducteur destiné à confiner un jet de zinc fondu ou de fonte liquide"*

Centre de Recherches de Pont à Mousson - GIS MADYLAM (1981)

CHAPITRE III

STABILITE DES SURFACES LIBRES DE METAUX  
LIQUIDES CONTROLEES PAR DES CHAMPS MAGNETIQUES ALTERNATIFS

-----



### CHAPITRE III

#### STABILITE DES SURFACES LIBRES DE METAUX LIQUIDES CONTROLEES PAR DES CHAMPS MAGNETIQUES ALTERNATIFS

-----

Les études entreprises afin de comprendre l'influence des champs magnétiques *continus* sur la stabilité des écoulements de fluides électroconducteurs sont nombreuses. Ces études, à caractère purement fondamental à l'origine, ont consisté à reprendre les configurations classiques donnant lieu à des instabilités (Rayleigh - Taylor, Kelvin-Helmoltz, Couette, Bénard ...) avec des fluides électroconducteurs en rajoutant l'effet d'un champ magnétique uniforme et stationnaire appliqué de l'extérieur. Une synthèse de tous ces travaux a été faite par CHANDRASEKHAR (1961). L'intérêt, d'un point de vue strictement physique, d'utiliser des champs magnétiques *continus* réside dans le fait que les courants induits qui apparaissent dans le milieu électroconducteur en mouvement introduisent une dissipation d'énergie supplémentaire qui présente l'originalité d'être anisotrope puisqu'elle privilégie la direction du champ magnétique appliqué. Grâce à la possibilité de dissiper par effet Joule l'énergie cinétique d'éventuelles perturbations les champs magnétiques continus ont en général une influence stabilisante.

Plus récemment, le développement des recherches sur la fusion thermonucléaire contrôlée et la construction des Tokamaks et de dispositifs permettant le confinement des plasmas a été à l'origine de nombreux travaux théoriques et expérimentaux sur les instabilités MHD dans lesquels le plasma était généralement considéré comme un *milieu infiniment conducteur* : les proceedings de la deuxième conférence internationale sur l'utilisation pacifique de l'énergie nucléaire (Genève 1958) constitue une excellente revue de ces questions notamment avec les travaux de BERKOVITZ, GRAD, RUBIN, FRIEDRICHS, GOERTZEL. Une synthèse des divers problèmes liés aux instabilités dans les plasmas a été effectuée récemment par

Chandrasekhar = zone stabilité

BATEMAN (1978). Le caractère dominant de ces situations tient à la fois à la haute conductivité du fluide et à la durée extrêmement courte de l'expérience envisagée (de l'ordre de 1 microseconde) ; il interdit toute pénétration du champ magnétique dans le plasma. Dans le cadre de cette approximation le plasma ne ressent la présence du champ magnétique que par l'intermédiaire de la pression magnétique exercée sur sa surface.

L'influence des champs magnétiques *alternatifs* sur la stabilité des écoulements de métaux liquides a été analysée beaucoup plus tard avec des motivations beaucoup plus appliquées liées à l'utilisation croissante de tels champs dans l'industrie métallurgique par exemple pour le pompage des métaux liquides, la fusion par induction ou encore la lévitation (GAILITIS, LIELAUSIS, NAIDENOV, GETSELEV, SCHAFFER, MELCHER, SAGARDIA, MOFFATT). Dans la plupart de ces études de stabilité, le métal liquide est considéré comme infiniment conducteur, ce qui exclut encore toute pénétration du champ magnétique et ouvre une grande analogie entre ces problèmes et les études de stabilité des plasmas confinés par des champs magnétiques. L'effet du champ magnétique est trouvé stabilisant dans des conditions géométriques tout à fait analogues à celles déduites des études avec champ magnétique continu. Mais, cet effet stabilisant, lié aux forces de surface engendrées par le champ magnétique, et absolument indépendant du mouvement du fluide (il ne dépend que de la déformation de la surface), n'est ni comparable ni analogue à l'effet stabilisant d'un champ magnétique continu.

#### 1. L'hypothèse de profondeur de pénétration nulle

Les courants de Foucault, responsables de l'annulation brutale du champ magnétique à la traversée de la surface libre se présentent sous la forme d'une nappe de courant sur laquelle, champ magnétique et courants induits sont orthogonaux. L'interaction qui en résulte donne naissance à une force de Laplace normale en tout point à la surface libre et qui est, par conséquent, assimilable à une pression ( $B^2/2\mu$ ). Le problème de la stabilité de la surface libre peut être ainsi abordé dans un esprit particulier en examinant uniquement si l'effet électromagnétique engendré par une déformation de l'interface est, en lui-même, et indépendamment de la nature du matériau, stabilisant ou déstabilisant. Il est alors commode d'oublier totalement que le milieu conducteur est liquide et de le remplacer par un

solide dont la surface extérieure présente une ondulation sinusoïdale caractérisée par un vecteur d'onde  $\vec{k}$ . L'écart  $\Delta$  entre les valeurs de la pression magnétique à la surface dans l'état perturbé  $P_p$  et dans l'état de référence  $P_r$ , rapporté à cette dernière, fournit alors un critère simple de stabilité : l'interface n'est stable que si  $\Delta = (P_p - P_r)/P_r$  est en phase avec l'ondulation imposée (la perturbation de la pression magnétique tend alors à réduire l'amplitude de la déformation de la surface). La détermination du champ magnétique  $\vec{B}$  existant dans le milieu isolant et de la pression  $B^2/2\mu$  qui s'exerce sur l'interface est très simple. Ce champ magnétique est en effet harmonique et bidimensionnel dans un milieu semi-infini limité par une frontière sinusoïdale à laquelle il est tangent. C'est dans ce contexte très précis qu'a été entreprise l'étude de SAGARDIA, dans le but de déterminer les caractéristiques des champs magnétiques susceptibles de permettre la lévitation d'une masse importante de métal liquide.

Le résultat principal mis en évidence par SAGARDIA coïncide avec le résultat que nous avons trouvé nous-mêmes dans une analyse s'affranchissant de l'hypothèse d'une épaisseur de peau non nulle. Ce résultat est conforme à celui qui dicterait l'intuition basée sur les conclusions des études semblables avec des champs magnétiques continus : l'effet du champ magnétique est stabilisant vis à vis des perturbations associées à des vecteurs d'onde qui lui sont parallèles et neutre vis à vis des perturbations associées à des vecteurs d'onde qui lui sont perpendiculaires. En outre, cet effet stabilisant est d'autant plus fort que le nombre d'onde de la perturbation est plus grand. Cependant les mécanismes mis en jeu sont totalement différents et nous reviendrons sur les analogies et les différences entre les champs magnétiques alternatifs et continus.

## 2. Analyse de la stabilité d'une interface soumise à l'action d'un champ magnétique alternatif uniforme. Limites de l'hypothèse $\delta = 0$ .

Cette analyse est développée dans l'article "Stability of an interface submitted to an alternating magnetic field" (cf. page 141). La conductivité du métal liquide est supposée finie de même que la pulsation du champ magnétique appliqué. Cette dernière est cependant choisie suffisamment élevée pour que le métal liquide ne puisse répondre aux sollicitations électromagnétiques pulsant à  $2\omega$ , à cause de son inertie d'une part, de sa viscosité d'autre part (celle-ci

n'est cependant pas prise en compte dans notre analyse). Ainsi le rapport  $\sigma/\omega$  entre la conductivité électrique du métal liquide et la pulsation du champ magnétique est choisi de telle façon que :

$$N_{\delta} = \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \frac{B^2}{\sqrt{\mu} \rho V} \ll 1$$

Une deuxième contrainte est imposée à ce rapport qui doit rester suffisamment faible pour que les effets résultant de la convection du champ magnétique par le champ de vitesse soient négligeables devant les effets correspondants dus au caractère alternatif du champ magnétique :

$$Rm_{\delta} = \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \sqrt{\mu} V \ll 1$$

Cette dernière contrainte est bien sûr toujours vérifiée à l'échelle du laboratoire ou des applications industrielles.

Le problème posé en ces termes est beaucoup plus complexe que celui formulé dans le cadre de l'hypothèse  $\delta = 0$ , à cause de la prise en compte de la diffusion du champ magnétique dans le milieu conducteur et du couplage existant entre les champs magnétiques de part et d'autre de l'interface par le biais des conditions aux limites.

Cependant, le caractère "géométrique" de l'instabilité considérée, qui apparaissait de façon évidente dans l'étude de *SAGARDIA*, demeure, et la géométrie de l'interface est encore le paramètre fondamental de notre analyse. Ceci entraîne deux conséquences : d'une part il y a un découplage total entre le champ magnétique et le champ de vitesse, d'autre part l'équation de dispersion obtenue ignore les détails du champ de vitesse et les propriétés mécaniques du milieu conducteur. Ainsi les résultats valent pour des milieux très variés comme des milieux élastiques ou des fluides non newtoniens.

Ce caractère géométrique commun excepté, des différences importantes, qui mettent en lumière les limites de l'hypothèse  $\delta = 0$ , apparaissent entre les deux analyses.

Transposée dans la géométrie de notre problème, l'hypothèse de *SAGARDIA*



conduit à la condition de stabilité suivante :

$$-\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k^2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2 \theta_1 + g k (\rho_1 - \rho_2) + Tk^3 + \frac{B_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\mu} \geq 0$$

Dans le cas d'une épaisseur de peau finie, cette même condition s'écrit :

$$-\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k^2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2 \theta_1 + g k (\rho_1 - \rho_2) + Tk^3 + \frac{B_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\mu} F(x) \geq 0$$

$$\text{avec } F(x) = \frac{\left[ (x^4 + 4)^{1/2} + x^2 \right]^{1/2} + (1-x) \left[ (x^4 + 4)^{1/2} - x^2 \right]^{1/2}}{\sqrt{2} (x^4 + 4)^{1/2}}$$

$$\text{ou } x = k\delta$$

Si ces deux conditions coïncident lorsque  $\delta \rightarrow 0$  ( $F(x) \rightarrow 1$ ) l'hypothèse de pénétration nulle sous-estime le champ magnétique capable de stabiliser une longueur d'onde dans une configuration donnée (de type Rayleigh-Taylor par exemple) et ceci d'autant plus que le nombre d'onde adimensionnel  $x=k\delta$  devient plus grand avec  $\delta$ . Si  $P_0$  désigne la puissance déduite de l'analyse  $\delta = 0$  à fournir pour produire le champ magnétique nécessaire pour stabiliser une longueur d'onde  $\lambda_0$  donnée ( $P_0 \sim B_0^2/2\mu$ ), la prise en compte de l'épaisseur de peau finie conduit à la puissance  $P'_0 = P_0/F(x)$  ; ( $P'_0 \sim B_0^2/2\mu F(x)$ ). Des erreurs importantes peuvent donc résulter des estimations faites à partir de l'analyse asymptotique : ainsi pour  $x = 0,1$ ,  $F(x) \sim 10$  et c'est une erreur d'un ordre de grandeur qui est commise sur l'évaluation de la puissance à fournir : la correction apportée est donc d'une grande importance du point de vue des perspectives d'applications métallurgiques.

L'origine des erreurs revient autant à l'hypothèse  $\delta = 0$  qu'à l'approximation "solide" qui lui est naturellement associée. En effet, nous avons pu montrer que le mouvement induit dans le métal liquide par la partie rotationnelle des forces électromagnétiques possède un caractère déstabilisant pour l'interface. Ce mouvement vient donc amoindrir l'effet stabilisant qui résulte de la seule prise en compte de la partie irrotationnelle des forces électromagnétiques.

Il convient de s'arrêter sur l'approximation "solide" et de s'interroger sur sa légitimité lorsque l'hypothèse  $\delta = 0$  est retenue. En effet, la partie rotationnelle des forces électromagnétiques ne tend pas vers zéro lorsque l'épaisseur de peau s'annule. Bien que, dans ce cas limite, les forces électromagnétiques soient en tout point perpendiculaires à l'interface, elles ne se réduisent pas uniquement à une pression et un mouvement peut être induit dans le métal liquide.

Les composantes de la force électromagnétique résultant d'une perturbation sinusoïdale de l'interface initialement plane ( $z = 0$ ) sous la forme  $z = \epsilon = \epsilon_0 e^{i(st + \vec{k} \cdot \vec{x})}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} f_x = i \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu\delta^2} k_x \left( \frac{e^{\alpha z}}{\gamma+k} + \frac{e^{\alpha^* z}}{\gamma^*+k} \right) \\ f_y = i \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu\delta^2} \frac{\delta k_y}{2} (1-i)e^{\alpha z} + (1+i)e^{\alpha^* z} \\ f_z = \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu\delta^2} \left\{ \left[ \frac{k_y^2 + \gamma k}{k(\gamma+k)} - \frac{1+i}{2} \frac{\delta}{k} (k_x^2 - \gamma k) \right] e^{\alpha z} + \left[ \frac{k_y^2 + \gamma^* k}{k(\gamma^*+k)} - \frac{1-i}{2} \frac{\delta}{k} (k_x^2 - \gamma^* k) \right] e^{\alpha^* z} \right\} \end{cases}$$

$$\text{avec } \gamma^2 = k^2 + 2i/\delta^2 \quad \text{et} \quad \alpha = \gamma + (1-i)/\delta$$

Afin de déterminer l'importance de la partie rotationnelle des forces électromagnétiques lorsque l'épaisseur de peau tend vers zéro, introduisons le vecteur  $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{z_0} \text{Rot } \vec{f} \, dz$$

dont les composantes déduites de l'expression de  $\vec{f}$  s'écrivent :

$$\tau_x = i k_y \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu\delta^2} \left[ \text{Re} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_y^2 + \gamma k}{k(\gamma+k)} - \frac{1+i}{2} \frac{\delta}{k} (k_x^2 - \gamma k) \right) \right] - \delta \right]$$

$$\tau_y = i k_x \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu\delta^2} \left[ \text{Re} \left[ \frac{1}{\gamma+k} - \frac{1}{\alpha} \frac{k_y^2 + \gamma k}{k(\gamma+k)} - \frac{1+i}{2} \frac{\delta}{k} (k_x^2 - \gamma k) \right] \right]$$

$$\tau_z = - \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu\delta^2} k_x k_y \left[ \text{Re} \left( \frac{\delta(1-i)}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha(\gamma+k)} \right) \right]$$

avec :  $2 R_e(z) = z + z^*$

Lorsque  $\delta \rightarrow 0$  les composantes de  $\vec{\tau}$  s'écrivent :

$$\tau_x = -i \frac{k_x^2 k_y}{k} \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu}$$

$$\tau_y = i \frac{k_x^3}{k} \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu}$$

$$\tau_z = 0$$

Ainsi quand  $\delta$  tend vers zéro :

$$\int_{-\infty}^{z_0} \vec{R} \otimes \vec{F} dz = \vec{R} \otimes \vec{F}$$

avec :

$$\vec{F} = (0, 0, \frac{k_x^2}{k} \frac{B_0^2}{2\mu} \epsilon_0 e^{i(st + \vec{k} \cdot \vec{r})})$$

Il est donc bien clair que lorsque l'épaisseur de peau devient nulle la nappe de courant superficielle réagit avec le champ magnétique appliqué pour engendrer à la fois des forces de pression et des forces rotationnelles qui se réduisent à une contrainte tangentielle tout à fait capable de mettre le métal en mouvement si celui-ci est fluide ; dans ce cas limite, le mouvement ne pourrait cependant être analysé que par la prise en compte de la viscosité.

Un dernier résultat obtenu grâce à l'analyse asymptotique  $\delta = 0$  est également à remettre en question et à modérer dans les situations physiques où l'épaisseur de peau est finie : il concerne la possibilité d'obtenir une stabilisation uniforme de tous les vecteurs d'onde quelle que soit leur orientation, grâce à l'utilisation de deux champs magnétiques alternatifs de même intensité appliqués dans des directions perpendiculaires. La condition, énoncée par *SAGARDIA*, à respecter pour obtenir un tel effet est l'utilisation de deux fréquences différentes pour chacun des champs magnétiques. Dans ce cas, en effet, les seules forces électromagnétiques de moyenne non nulle qui apparaissent résultent de l'interaction de chaque champ magnétique avec ses propres courants induits. Les interactions croisées donnent naissance à des forces pulsantes de moyenne nulle. Il n'y a donc pas interaction mais superposition ("superimposability") des effets électromagnétiques. Le terme d'origine électromagnétique qui apparaît dans l'équation de dispersion et dans la condition de stabilité est la somme des termes

relatifs à chacun des champs magnétiques orthogonaux soit :

$$\frac{B_0^2 k^2}{2\mu} \cos^2 \theta + \frac{B_0'^2 k^2}{2\mu} \sin^2 \theta = \frac{B_0^2 k^2}{2\mu}$$

Toute dépendance en  $\theta$  disparaît ainsi et l'anisotropie de l'effet stabilisant est supprimée.

Ce résultat est attaché à l'hypothèse "solide" ( $\delta = 0$  et fluide non visqueux) et ne peut être atteint lorsque l'épaisseur de peau est finie.

Soient, en effet, deux champs magnétiques d'amplitudes  $B_0$  et  $B_0'$  orientés perpendiculairement l'un à l'autre et ayant pour pulsations respectives  $\omega$  et  $\omega'$ . La conductivité électrique du métal liquide, dont on veut stabiliser la surface libre, connue,  $\omega$  et  $\omega'$  doivent être choisis de façon que :

$$N_\delta = \left( \frac{\sigma}{\mu\omega} \right)^{1/2} \frac{B_0^2}{\rho V} \ll 1 \quad \text{et} \quad N_{\delta'} = \left( \frac{\sigma}{\mu\omega'} \right)^{1/2} \frac{B_0'^2}{\rho V} \ll 1$$

ainsi que

$$R_\delta = \left( \frac{\mu\sigma}{\omega} \right)^{1/2} V \ll 1 \quad \text{et} \quad R_{\delta'} = \left( \frac{\mu\sigma}{\omega'} \right)^{1/2} V \ll 1$$

En outre, pour obtenir la superposition, et non la composition, des effets électromagnétiques il faut que le métal liquide ne puisse répondre à l'action des forces électromagnétiques résultant de l'interaction des deux champs magnétiques. Ces forces, de moyenne nulle, pulsent à  $\omega + \omega'$  et  $|\omega - \omega'|$ , il faut donc que la condition suivante soit également vérifiée :

$$N = \left( \frac{\sigma}{\mu|\omega - \omega'|} \right)^{1/2} \frac{\sup(B_0^2, B_0'^2)}{\rho V} \ll 1$$

Dans ce cas le terme électromagnétique qui apparaît dans la condition de stabilité de l'interface s'écrit :

$$\frac{B_0^2 k^2}{2\mu} F(x) \cos^2 \theta + \frac{B_0'^2 k^2}{2\mu} F(x') \sin^2 \theta$$

avec :  $x = k\delta$  ;  $x' = k\delta'$

et  $\delta^2 = 2/\mu \sigma \omega$  ;  $\delta'^2 = 2/\mu \sigma \omega'^2$

Puisque  $|\omega - \omega'|$  n'est pas petit, pour une valeur de  $k$  fixée,  $x$  et  $x'$  sont très différents, de même que  $F(x)$  et  $F(x')$ . Il en résulte que l'isotropie ne peut être assurée que pour un, et un seul, nombre d'onde  $k$  : celui pour lequel  $B_0^2 F(x) = B_0'^2 F(x')$ . L'anisotropie de l'effet stabilisant ne peut donc être supprimée totalement lorsque  $\omega$  et  $\omega'$  sont finis. L'utilisation de deux champs magnétiques perpendiculaires permet seulement de réduire cette anisotropie en ne laissant aucun vecteur d'onde non affecté par le champ magnétique ; cependant l'effet stabilisant ne peut être rendu uniforme sur tout vecteur d'onde de module fixé.

### 3. Comparaison des critères de stabilité des surfaces libres soumises à des champs magnétiques alternatifs et à des champs magnétiques continus.

L'analyse de la stabilité de la surface libre d'un liquide électro-conducteur soumis à l'action d'un champ magnétique continu est, comme dans le cas d'un champ magnétique alternatif, fortement simplifiée lorsque l'hypothèse d'une conductivité électrique infinie est retenue. Dans ce cas, le champ magnétique ne peut diffuser dans le milieu conducteur et il obéit à une équation de convection par le champ de vitesse. Les lignes de champ magnétique sont alors des lignes matérielles, toujours constituées des mêmes éléments ; elles se déplacent avec le fluide comme une substance passive et tout se passe comme si elles étaient, en permanence, attachées à lui.

Dans une configuration géométrique semblable à celle définie dans l'analyse de la stabilité en présence d'un champ magnétique alternatif, la condition de stabilité s'écrit :

$$-\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k^2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2 \theta_1 + g k (\rho_1 - \rho_2) + Tk^3 + \frac{2B_0^2 k^2}{\mu} \cos^2 \theta \geq 0$$

où  $B_0$  représente l'intensité du champ magnétique continu appliqué. L'analogie entre cette condition et celle déduite de la théorie de *SAGARDIA* (cf. page 123 ) est frappante. Dans les deux cas, l'effet du champ magnétique est stabilisant et cette influence stabilisante se répartit de la même façon suivant l'orientation et le module des vecteurs d'onde, bien que les mécanismes mis en jeu soient totalement différents. Dans les deux cas, on peut définir une tension de surface équivalente qui rend compte de l'effet du champ magnétique ; elle s'écrit :

$$\begin{aligned} - T_e &= \frac{2B_0^2}{\mu k} \cos^2 \theta && \text{pour un champ magnétique continu d'intensité } B_0 \\ - T'_e &= \frac{2B_0'^2}{\mu k} \cos^2 \theta && \text{pour un champ magnétique alternatif de valeur efficace } B_0' . \end{aligned}$$

Cette tension est anisotrope par sa dépendance en  $\theta$  et son intensité est variable avec le nombre d'onde. Elle a pour origine la tension de Maxwell (  $\sim B^2/2\mu$  ) qui étire les lignes de champ, s'oppose à leur déformation, et freine ainsi les déformations de la surface libre.

L'examen des termes d'origine électromagnétique dans les conditions de stabilité (  $\frac{B_0'^2 k^2}{\mu} \cos^2 \theta$  pour un champ magnétique alternatif et  $2\frac{B_0^2 k^2}{\mu} \cos^2 \theta$  pour un champ magnétique continu, fait apparaître un rapport 2 et tendrait à prouver qu'un champ magnétique continu possède un pouvoir stabilisant plus grand qu'un champ magnétique alternatif de même valeur efficace (  $B_0 = B_0'$  ). Cependant, ce résultat ne vaut qu'autant que l'hypothèse d'une conductivité électrique infinie est retenue. Cette hypothèse n'est pas justifiable au même titre dans les deux cas.

Afin de préciser ce point, comparons les ordres de grandeur des courants induits associés à une perturbation de l'interface dans les deux cas. Ce sont en effet les courants induits par la perturbation qui, par la dissipation Joule (  $j^2/\sigma$  ) qu'ils introduisent, ont la possibilité de dissiper l'énergie de la perturbation.

Une première différence importante apparaît entre les courants induits dans chacun des cas. En présence d'un champ magnétique alternatif, les courants induits existent, même lorsque le fluide est au repos, dès que la géométrie de l'interface s'écarte de la géométrie de référence. Il est aisément concevable que dès qu'une protubérance, dont la dimension caractéristique n'est pas très grande devant l'épaisseur de peau, apparaît sur la surface libre, elle est traversée par le champ magnétique alternatif et se trouve soumise à des variations de flux qui font apparaître des courants et des forces qui tendent à réduire la protubérance et par conséquent les variations de flux dont elle est le siège. L'action du champ magnétique est donc directe et s'exerce dès qu'une modification géométrique apparaît par rapport à la géométrie initiale.

Avec un champ magnétique continu, il en est autrement. En effet le champ électromoteur ( $\sim \vec{V} \wedge \vec{B}$ ) responsable de la présence des courants induits ne peut exister que si le fluide est animé d'une vitesse. Une interface déformée, mais statique, ne subit donc aucun effet de la part du champ magnétique continu appliqué. L'action d'un champ magnétique continu est donc indirecte puisqu'elle se fait sentir sur l'évolution de la géométrie de l'interface par le biais de l'écoulement qui en résulte dans le fluide et non par la géométrie elle-même. C'est la cinématique et non la géométrie qui régit l'action d'un champ magnétique continu sur une surface libre. C'est pourquoi la définition, par pure analogie, d'une tension de surface d'origine magnétique pour décrire les effets d'un champ magnétique continu n'est pas très justifiée avec ce type de champ.

Elle l'est beaucoup mieux avec les champs magnétiques alternatifs, puisqu'alors, comme pour la tension superficielle, une cause géométrique suffit à engendrer un effet. Néanmoins, dans ce cas, la cinématique engendre elle aussi un effet électromagnétique. Mais les intensités de courants induits, associés respectivement aux effets géométriques et aux effets cinématiques, qui agissent sur la stabilité d'une interface soumise à un champ magnétique alternatif, sont très différentes.

Soit une perturbation d'une telle interface, de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  et d'amplitude  $\varepsilon$  qui introduit une perturbation  $\vec{b}$  du champ magnétique appliqué  $\vec{B}$  et une perturbation  $\vec{u}$  du champ de vitesse  $\vec{U}$ , l'ordre de grandeur de la perturbation  $\vec{b}$ , proportionnelle à  $\varepsilon$  et attachée à l'échelle  $\delta$ ,

est donné par :

$$b \sim \frac{B_0 \varepsilon}{\delta}$$

Ce sont les conditions aux limites à l'interface et l'équation de continuité qui donne l'ordre de grandeur de la perturbation  $\vec{u}$ . En effet l'égalité de la composante  $w$  de la vitesse de perturbation et de la vitesse de déplacement de l'interface conduit à :

$$w \sim k \varepsilon U \sim U \varepsilon / \lambda$$

ce qui fixe, par continuité, l'ordre de grandeur des deux autres composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  :

$$u \sim v \sim w \lambda / \delta \sim U \varepsilon / \delta$$

Les courants induits résultant d'une part du caractère alternatif du champ magnétique appliqué ( $\vec{J}_1$ ), d'autre part, de l'écoulement provoqué par la déformation de l'interface en présence du champ magnétique extérieur ( $\vec{J}_2$  et  $\vec{J}_3$ ) ont pour ordre de grandeur respectifs :

$$\begin{aligned} j_1 &\sim \frac{1}{\mu} \frac{b}{\ell} \sim \frac{B_0 \varepsilon}{\mu \delta \ell} & \ell = \inf(\delta, \lambda) \\ j_2 &\sim \frac{\sigma B_0 U \varepsilon}{\ell} \\ j_3 &\sim \frac{\sigma B_0 \varepsilon U}{\delta} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{j_2}{j_1} \sim \mu \sigma U \delta = R_\delta$$

$$\frac{j_3}{j_1} \sim \mu \sigma U \ell = R_\delta \frac{\ell}{\delta} \leq R_\delta$$



Le nombre de Reynolds magnétique  $R_\delta$  est toujours très petit devant l'unité et peut être rendu aussi petit que l'on veut en réduisant  $\delta$ , c'est à dire en augmentant la fréquence du champ magnétique appliqué. Ainsi c'est le courant  $\vec{J}_1$  associé au caractère alternatif du champ magnétique appliqué et à la déformation de l'interface qui domine  $\vec{J}_2$  et  $\vec{J}_3$ . L'ordre de grandeur de ces derniers est totalement indépendant du caractère alternatif du champ magnétique et serait inchangé si le champ magnétique était continu (à l'exception près que l'échelle  $\delta$  serait remplacée par  $\lambda$  dans  $\vec{J}_3$ ).

La coexistence dans une même configuration des courants induits représentatifs des champs magnétiques alternatifs et des courants induits représentatifs des champs magnétiques continus, permet de conclure, grâce à l'analyse d'ordre de grandeur précédente, qu'en réalité un champ magnétique alternatif a un pouvoir stabilisant plus important qu'un champ magnétique continu, lorsque la conductivité électrique n'est pas supposée infinie. En outre, si avec un champ magnétique continu, une fois fixées l'intensité du champ magnétique, la géométrie et les caractéristiques physiques des milieux en présence, l'intensité des courants induits est déterminé, il est possible, avec un champ magnétique alternatif, d'accroître l'intensité des courants induits en augmentant la fréquence. L'effet stabilisant associé à la présence des courants induits peut ainsi être accru. La possibilité d'augmenter la fréquence permet de remédier aux effets néfastes de conductivités électriques faibles, puisque c'est le groupement  $\sigma\omega$  qui est pertinent. Une telle possibilité n'existe pas avec les champs magnétiques continus.

#### 4. Possibilités d'application, à des situations concrètes, des résultats de la théorie précédente. Effet de la non-uniformité du champ magnétique

Les conditions retenues, qui imposent notamment une valeur fixée de l'amplitude du champ magnétique alternatif appliqué et une géométrie uniforme peuvent paraître académiques à cause des différences qu'elles présentent avec les situations concrètes dans lesquelles l'effet du champ magnétique est utilisé pour stabiliser une interface de géométrie fixée par ailleurs ou pour imposer de façon stable la géométrie d'une interface. Deux différences principales sont à souligner :

a) ce n'est pas l'amplitude du champ magnétique lointain qui est imposée de l'extérieur, mais l'intensité du courant dans l'inducteur, ou encore la tension aux bornes de celui-ci. Cependant, pour les études de stabilité locales, pour lesquelles l'amplitude de la perturbation, supposée sinusoïdale, reste faible devant la distance entre la surface libre et l'inducteur, il n'y a pas de variations de flux significatives dans l'espace isolant où est situé l'inducteur : il est alors équivalent de supposer constante l'intensité du courant dans l'inducteur ou la valeur de l'amplitude en son voisinage. Par contre, dans le cas où le milieu métallique liquide peut subir des déplacements en bloc (contexte des études de stabilité globale) les variations de flux sont importantes dans le milieu isolant : l'amplitude du champ magnétique ne peut donc être supposée fixe si l'intensité du courant dans l'inducteur est imposée. L'invariance du courant dans l'inducteur est alors une condition déterminante dans la recherche des critères de stabilité de l'interface (*SNEYD - MOFFATT 1981*).

b) un champ magnétique alternatif uniforme est incapable d'imposer la forme et de fixer la position de la surface libre d'un milieu métallique liquide, puisqu'il ne permet pas de faire apparaître des forces électromagnétiques de rappel capables, en cas d'écart, de ramener la surface libre dans la position initiale désirée. Pour obtenir de telles forces de rappel, il faut créer dans l'espace isolant environnant la surface libre des gradients de champ magnétique importants. Le caractère harmonique du champ magnétique dans le milieu isolant est tout à fait défavorable à la création de tels gradients qui doivent donc être forcés au niveau de l'inducteur où l'échelle caractéristique de variation spatiale du champ magnétique peut être imposée. L'inducteur est dans ce but, constitué généralement de deux systèmes de conducteurs parallèles distincts, intercalés et alimentés par des courants alternatifs déphasés ou de fréquences différentes : dans le premier cas, le champ magnétique obtenu est glissant ou tournant, dans le second cas, il est oscillant ou animé d'une rotation réversible. L'échelle caractéristique de l'enroulement inducteur, généralement appelée pas polaire, qui est la distance la plus courte entre deux conducteurs appartenant chacun à un système est alors l'échelle caractéristique des gradients de champ magnétique dans le milieu isolant.

L'analyse de la stabilité d'une interface plane ou cylindrique soumise à l'action d'un tel champ magnétique montre que l'étude précédente prenant en compte un champ magnétique uniforme reste pertinente. En effet, considérons (figure 1) un inducteur formé d'une nappe de deux familles de conducteurs parallèles

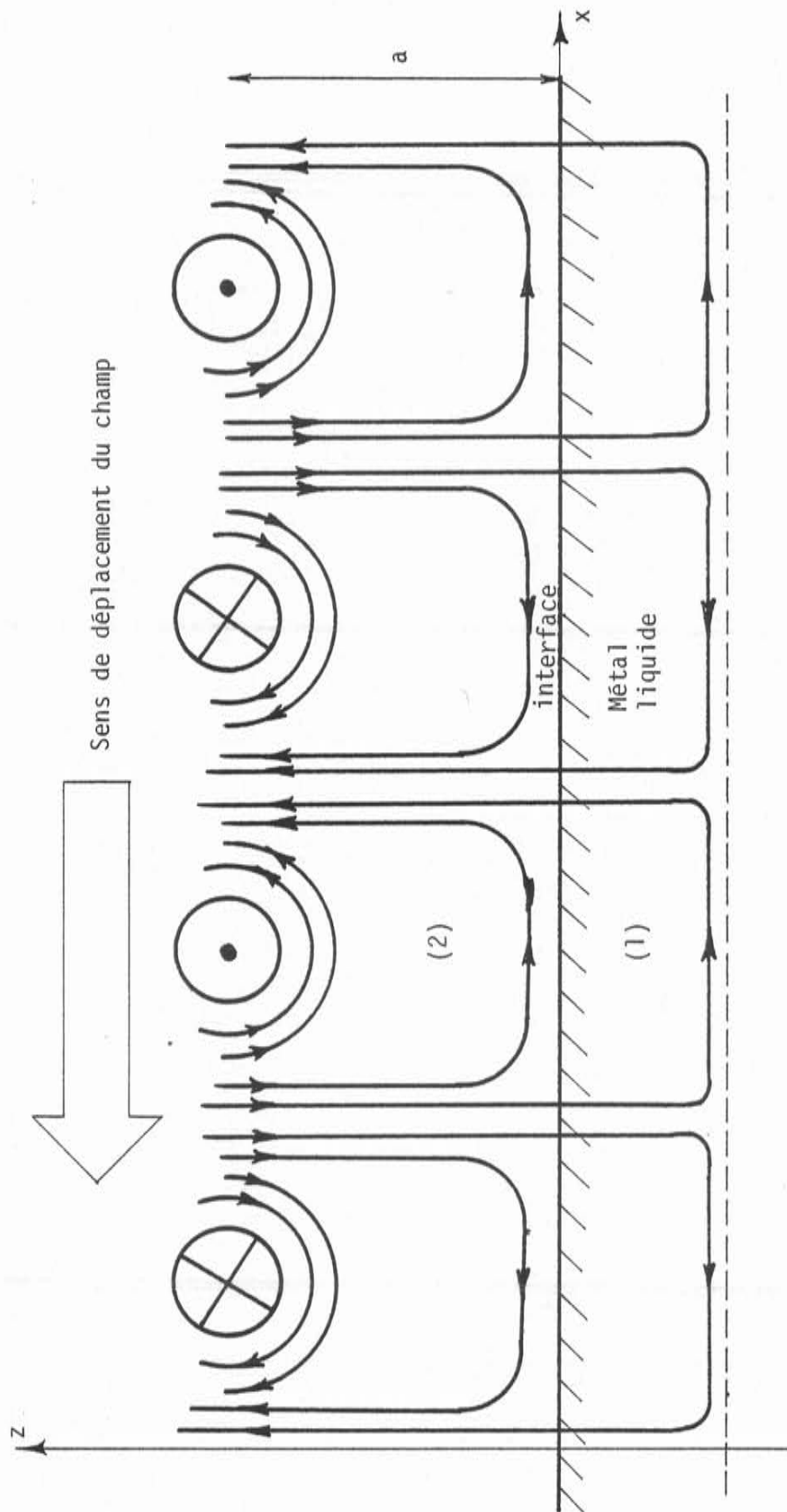


FIGURE 1

intercalées et alimentées par des courants alternatifs déphasés d'un quart de période. Le champ magnétique engendré qui présente une périodicité spatiale et temporelle est animé d'un mouvement de translation à la vitesse  $V = \lambda f$ , si  $f$  est la fréquence d'alimentation et  $\lambda$  la longueur d'onde commune des enroulements de chacune des familles de conducteurs.

Considérons le cas concret des fréquences élevées pour lesquelles l'épaisseur de peau  $\delta$  dans le métal liquide est très faible devant la longueur d'onde  $\lambda$  du champ magnétique glissant :

$$\delta/\lambda \ll 1$$

Le champ magnétique harmonique dans le milieu isolant 1 et régi par un mécanisme de diffusion dans le milieu conducteur 2 est donné par :

$$\begin{cases} B_{2x} = B_0 \operatorname{ch}(2\pi z/\lambda) \cos(\omega t + 2\pi x/\lambda) \\ B_{2z} = B_0 \operatorname{sh}(2\pi z/\lambda) \sin(\omega t + 2\pi x/\lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{1x} = B_0 e^{z/\delta} \cos(\omega t + z/\delta + 2\pi x/\lambda) \\ B_{1z} = -B_0 \sqrt{2} \frac{\delta}{\lambda} e^{z/\delta} \cos(\omega t + 2\pi x/\lambda + z/\delta + \pi/4) \end{cases}$$

si  $B_0$  désigne l'amplitude du champ magnétique à l'interface métal liquide - milieu isolant.  $B_0$  est relié à l'amplitude  $B_i$  du champ magnétique mesuré le long de l'inducteur de ( $z=a$ ) par :

$$B_i = B_0 \operatorname{ch}(2\pi a/\lambda)$$

A cause de l'hypothèse  $\delta/\lambda \ll 1$ , le champ magnétique dans le milieu conducteur est fortement dominé par l'effet de peau et est quasi parallèle à l'interface supposée initialement plane :

$$\frac{|B_z|}{|B_x|} \sim \frac{\delta}{\lambda} \ll 1$$

De plus :

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} \sim \frac{B_x}{\delta}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} \sim \frac{B_z}{\lambda} \sim \frac{B_x (\frac{\delta}{\lambda})^2}{\delta} \ll \frac{B_x}{\delta}$$

Les courants induits dans le métal liquide résultent donc essentiellement de la diffusion dans le milieu conducteur de la composante parallèle à l'interface :

$$\vec{J} = (0, \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0)$$

Le caractère bidimensionnel du champ magnétique dominé par un mécanisme de diffusion dans le métal liquide, permet d'écrire la force électromagnétique sous la forme (cf. chapitre I) :

$$\vec{F} = - \text{grad } \phi + \vec{F}_h$$

avec :

$$\phi = \frac{B_0^2}{4\mu} e^{2z/\delta} + \frac{B_0^2}{4\mu} e^{2z/\delta} \cos 2(\omega t + z/\delta + 2\pi x/\lambda)$$

$$F_h = ( - \frac{B_0^2}{\mu \lambda} e^{2z/\delta}, 0)$$

La partie rotationnelle de la force électromagnétique est donc indépendante du temps et conduit à un écoulement parallèle et permanent du métal liquide. De plus, si la fréquence est choisie suffisamment élevée pour que le paramètre d'interaction  $N_\delta = (\frac{\sigma}{\mu \omega})^{1/2} \frac{B_0^2}{\rho V}$  soit petit devant l'unité, le métal liquide ne ressent pas les effets de la pression électromagnétique périodique dont il ne perçoit que la valeur moyenne. Ainsi le plan  $z = 0$  correspond à une valeur constante pour  $\phi$  et le champ magnétique glissant considéré est capable de contrôler une interface plane.

De l'hypothèse  $\delta/\lambda \ll 1$ , il résulte donc que c'est essentiellement la composante  $B_x$  du champ magnétique qui gouverne la dynamique du système. Ainsi, il est possible d'isoler la partie "efficace" du champ magnétique vis à vis du contrôle de la surface libre horizontale, en ne retenant que la composante du champ magnétique qui lui est parallèle et en ignorant la périodicité spatiale que le métal liquide ne ressent pas, soit :

$$\vec{B}_2 = \left[ B_0 \operatorname{ch}(2\pi z/\lambda) \cos \omega t, 0 \right]$$

$$\vec{B}_1 = \left[ B_0 e^{z/\delta} \cos(\omega t + z/\delta), 0 \right]$$

en supposant que l'écoulement produit par la partie rotationnelle des forces électromagnétiques, qui disparaît avec ce schéma, est imposé et maintenu par une cause extérieure, indépendante du champ magnétique qui vient d'être défini. Ainsi dans ce schéma, au voisinage de l'interface, le champ magnétique est équivalent à un champ magnétique uniforme puisque :

$$\left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_{z=0^+} = 0$$

Si un tel schéma et une telle équivalence sont acceptables et justifiés dans l'état d'équilibre de référence, il convient d'être prudent avant d'affirmer qu'il en est de même en ce qui concerne les critères de stabilité de l'interface. Pour que les résultats de l'analyse menée avec un champ magnétique uniforme soient applicables au cas présent, il importe de vérifier que la composante du champ magnétique perpendiculaire à l'interface n'est pas à l'origine de forces non négligeables (devant les forces homologues induites par la présence de  $B_x$ ) dans l'état perturbé.

Outre la différence d'ordre de grandeur qui apparaît dans le milieu conducteur entre  $B_x$  et  $B_z$ , une différence fondamentale existe entre les deux composantes, lors de la traversée de l'interface, qui a une importance capitale dans l'étude de la stabilité. En effet, le champ magnétique dans les milieux isolant et conducteur s'écrit :

$$\vec{B} = \vec{f}(z) e^{i(\omega t + 2\pi x/\lambda)}$$

Aussi l'équation de continuité impose-t-elle pour  $\vec{B}$  :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

soit :  $B_{2x} = i \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial B_{2z}}{\partial z}$

et :  $B_{1x} = i \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial B_{1z}}{\partial z}$

ce qui implique, puisque les deux composantes de  $\vec{B}$  sont continues à la traversée de l'interface (les matériaux en présence étant non magnétiques et de conductivité finie) :

$$(B_{2x})_0 = (B_{1x})_0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\partial B_{2z}}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial B_{1z}}{\partial z}\right)_0$$

Par suite à la traversée de l'interface  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  est continu alors que  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  est discontinu.

Dans l'état perturbé où l'équation de l'interface s'écrit

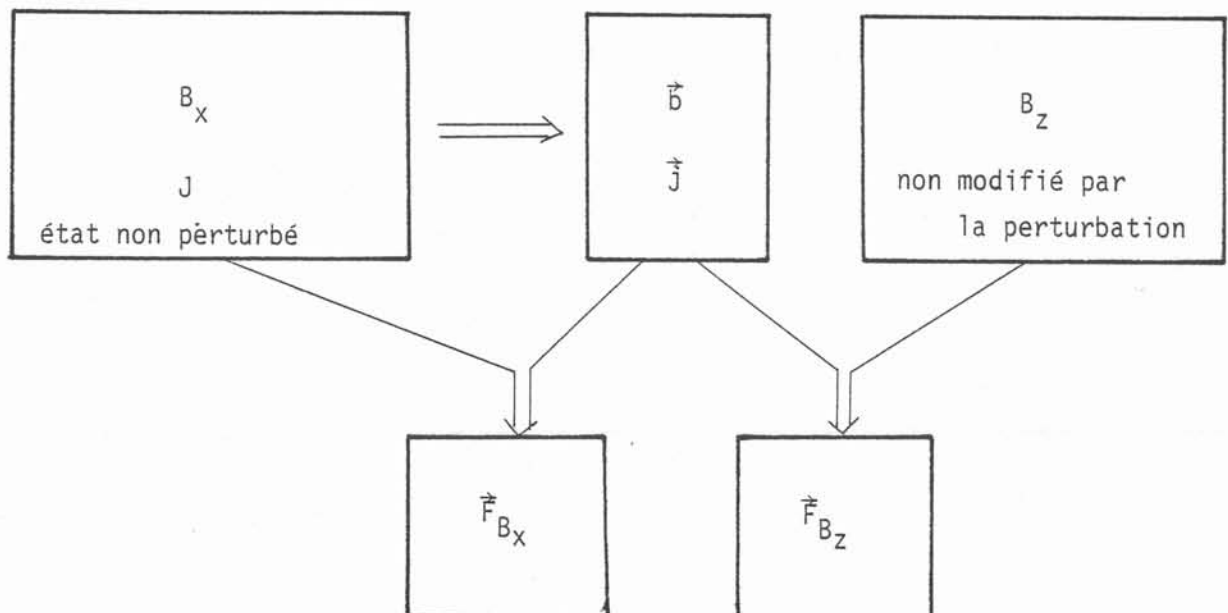
$z = \varepsilon_0 e^{i(st + \vec{k} \cdot \vec{r})} = z_0$ , les conditions aux limites, qui imposent la continuité du champ magnétique à la traversée de l'interface, relie  $\vec{B}$  et la perturbation  $\vec{b}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (b_{1x} - b_{2x})_{z_0} &= (B_{2x} - B_{1x})_{z_0} \\ &= (B_{2x} - B_{1x})_0 + z_0 \left( \frac{\partial B_{2x}}{\partial z} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right)_0 + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right) \\ &= -z_0 \left( \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right)_0 + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right) \end{aligned}$$

Cette condition est tout à fait semblable à celle rencontrée dans le cas d'un champ magnétique alternatif uniforme. En ce qui concerne la composante verticale du champ magnétique :

$$\begin{aligned}
 (b_{1z} - b_{2z})_{z_0} &= (B_{2z} - B_{1z})_{z_0} \\
 &= (B_{2z} - B_{1z})_0 + z_0 \left( \frac{\partial B_{2z}}{\partial z} - \frac{\partial B_{1z}}{\partial z} \right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right) \\
 &= 0 + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right)
 \end{aligned}$$

Donc à l'ordre le plus bas en  $\varepsilon/\delta$ , c'est à dire vis à vis des perturbations de faible amplitude justifiant une analyse linéaire ( $\varepsilon/\delta \ll 1$ ), la composante verticale du champ magnétique ne subit aucune modification et, comme dans le cas d'un champ magnétique uniforme horizontal, seule la composante  $B_x$  introduit une perturbation tridimensionnelle du champ magnétique et des courants induits. Il en résulte que dans l'état perturbé  $B_z$  n'intervient que par son interaction avec les courants induits parallèles qui résultent de la présence de  $B_x$ . Les interactions se produisent donc de la façon suivante :





Puisque  $\vec{F}_{B_x}$  et  $\vec{F}_{B_z}$  résultent respectivement de l'interaction de  $B_x(\sim B_0)$  et  $J(\sim B_0/\mu\delta)$  avec les perturbations  $\vec{b}$  et  $\vec{j}$  pour la première et de  $B_z(\sim \frac{\delta}{\lambda} B_0)$  avec les mêmes perturbations pour la seconde, l'ordre de grandeur du rapport de ces deux forces s'écrit :

$$\frac{|\vec{F}_{B_z}|}{|\vec{F}_{B_x}|} \sim \frac{\delta}{\lambda} \ll 1$$

Compte-tenu de ce résultat il est possible d'affirmer maintenant que vis à vis des perturbations de faible amplitude ( $\varepsilon/\delta \ll 1$ ) un champ magnétique glissant de fréquence élevée ( $\delta/\lambda \ll 1$ ) se comporte, pour ce qui concerne la stabilité des surfaces libres, comme un champ magnétique alternatif uniforme. Les résultats de l'analyse précédente sont donc tout à fait applicables aux champs magnétiques glissants ou tournants dans les possibilités de contrôle des surfaces libres planes ou cylindriques. Pour ces dernières, cependant, contrôlées par des champs magnétiques tournants, la validité de l'étude est soumise à une condition supplémentaire : l'épaisseur de peau  $\delta$  doit être faible devant le rayon caractéristique du domaine métallique cylindrique pour que tout effet de courbure de la surface libre puisse être négligé.

## VI. Conclusion

Bien que les mécanismes fondamentaux mis en jeu soient différents, les champs magnétiques alternatifs possèdent le même caractère stabilisant que les champs magnétiques continus. Quelle que soit la nature du champ magnétique appliqué, l'influence stabilisante se répartit de la même façon anisotrope sur les vecteurs d'onde : l'effet est maximum pour les vecteurs d'onde parallèles au champ magnétique et nul pour les vecteurs d'onde qui lui sont perpendiculaires.

\* Cet effet est, de plus, croissant avec  $k$ .

Les champs magnétiques alternatifs possèdent un pouvoir stabilisant plus important que les champs magnétiques continus. En outre, pour une configuration géométrique et une intensité du champ magnétique données, il est possible d'accroître l'effet stabilisant du champ en augmentant la fréquence. Ce degré de

liberté supplémentaire permet d'obtenir des effets significatifs avec des champs magnétiques alternatifs dans des cas où les champs magnétiques continus, d'intensité réaliste, seraient totalement inefficaces : c'est le cas en particulier avec les milieux très faiblement électroconducteurs. C'est le produit  $\sigma\omega$  qui est pertinent vis à vis de la stabilité des interfaces (par l'intermédiaire du paramètre  $R_\lambda = \mu \sigma \omega \lambda^2$ ), aussi toute faiblesse de  $\sigma$  peut être compensée par des valeurs importantes de  $\omega$ .

Il faut se garder d'attribuer une valeur universelle aux résultats des analyses reposant sur l'hypothèse d'une conductivité électrique infinie. Cette hypothèse très forte marque profondément les résultats qui ne peuvent être extrapolés : ainsi sur le plan quantitatif des erreurs importantes (d'un ordre de grandeur) peuvent être faites dans l'estimation de la puissance à fournir à l'inducteur destiné à stabiliser une longueur d'onde donnée dans une configuration fixée. Sur le plan qualitatif des inexactitudes apparaissent également : il n'est, par exemple, pas possible avec des valeurs réalistes de la conductivité électrique, de faire disparaître totalement l'anisotropie de l'effet stabilisant du champ magnétique ; cette possibilité existe cependant avec des matériaux infiniment conducteurs.

STABILITY OF AN INTERFACE SUBMITTED TO AN  
ALTERNATING MAGNETIC FIELD

-----

Marcel GARNIER\* - René MOREAU\*

-----

ABSTRACT :

The stability of an interface between a liquid metal and an insulating atmosphere, in which an inductor generates a uniform alternating magnetic field, is investigated with a particular attention given to the influence of the electrical conductivity of the liquid. In a range of high frequencies, a quasi steady approximation is justified, in which the pulsation of the electromagnetic forces is negligible compared with their mean part, and the unsteadiness of the magnetic field only appears through the skin effect. By means of a linear analysis, the influence of the alternating magnetic field on a perturbation of the interface is found to be neutral for wavevectors perpendicular to the magnetic field, and stabilizing for any other orientation. The stabilizing effect is the largest when the angle between the wavevector and the magnetic field is the smallest and, when the wavenumber is the largest. This effect, maximum for an infinitely conducting medium is quickly decreasing with the electrical conductivity.

---

\* GIS MADYLAM - BP 53 X - 38041 - GRENOBLE CEDEX - France

## 1. INTRODUCTION

To be able to melt, purify, alloy or shape a metal without having resort to any wall, crucible or mould is an old dream of metallurgists. Some recent processes using alternating magnetic fields suggest this dream is not completely fanciful and might become actual before long ; Okress et al. (1952) and Sagardia (1977) achieve the levitation melting of important loads of metal ; Getselev et al. (1966 - 1971) suppress the ingot mould of usual continuous casting of aluminium devices ; Etay (1981) uses high frequency fields to shape liquid metal columns. In all these patented techniques, the undesirable and sometimes prohibitive contact between liquid metal and walls is suppressed and chemical or physical contamination of the melt from the crucible is avoided. The equilibrium between the applied electromagnetic forces, the gravity and the fictitious inertial forces determines the position of the liquid metal-atmosphere interface. The stability of this interface, whose shape will give by cooling and solidifying the desired shape of the final ingot, is a basic requirement in order to achieve successful industrial electromagnetic devices. Through the new mechanisms it involves, the unsteadiness and the inhomogeneity of the applied magnetic field bring an original character to this stability problem.

The main results concerning the effect of a steady uniform magnetic field on the stability of an interface (Chandrasekhar, 1961) are quite independent of the problem we are interested in. They concern the generally stabilizing influence of such fields because of the Joule dissipation. In our case, the geometrical deformation of the interface between an insulating atmosphere and an electrically conducting liquid leads, by means of a mutual influence mechanism, to a perturbation of the induced currents and of the electromagnetic forces in the thin layer near the interface where they are applied. Such an interaction between the position of the interface and an external inductor is specific to alternating magnetic fields and does not appear with steady fields. Likewise, the results established by Roberts (1973) about the effect of steady magnetic field on Kelvin-Helmoltz instability concern unsteady flows and are independent of the subject of this paper.

General equations for the stability of unsteady parallel flows of a viscous electrically conducting fluid in an unsteady magnetic field were first derived by Drazin (1967). The Joule and viscous dissipation, the mechanisms connected with the pulsation of the magnetic field and with the unsteadiness of the flow, which coexist and interact, are taken into account in this problem which then becomes highly complex to analyse and mathematically intractable. To get more than meager results by means of general considerations, such as the power equation which shows the destabilizing effect of the pulsation, Drazin is led to make restrictive approximations and only considers the particular case of a non dissipative vortex sheet in an alternating magnetic field. In a range of moderate frequencies where the magnetic field may be considered as uniform over a wavelength, the influence of the field is found to be destabilizing. However, neglecting all dissipative mechanisms prevents the drawing of general conclusions since dissipation may considerably modify the parametric stability.

On the contrary, to clear up the effect of the unsteadiness of the magnetic field, our study considers the range of high frequencies  $\omega$  such that :

$$R_{\delta} = \left( \frac{\mu \sigma}{\omega} \right)^{1/2} V \ll 1 \quad (a)$$

$$N_{\delta} = \left( \frac{\sigma}{\mu \omega} \right)^{1/2} \frac{B^2}{\rho V} \ll 1 \quad (b)$$

where  $R_{\delta}$  and  $N_{\delta}$  are respectively the magnetic Reynolds number and the interaction parameter built with the skin depth  $\delta = (\mu \sigma \omega / 2)^{-1/2}$ . Here  $\mu$  denotes the magnetic permeability of the fluid,  $\sigma$  its electrical conductivity and  $\rho$  its density.  $B$  denotes the amplitude of the applied magnetic field and  $V$  a typical velocity.

These two conditions define a particular class of MHD problems in which the magnetic field is substantially independent of the motion of the fluid (a) which is driven by the mean part of the given electromagnetic forces,

the unsteady part of which it cannot feel (b). Condition (a) is classical and implies that the currents induced by the motion of an electrically conducting fluid particle across the magnetic field lines are very small compared with the currents induced by the in steadiness of the magnetic field, responsible for the skin effect. Condition (b) justifies an important quasi-steady approximation similar to that introduced by Alemany and Moreau in an other context. If  $\omega$  is high enough it is easy to show that the inertia of fluid prevents it from following electromagnetic oscillations pulsating with frequency  $2\omega$ . Indeed the variation  $\Delta V$  of velocity of a fluid particle submitted during  $\Delta t$  to such quickly pulsating forces is given by :

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} \sim \parallel \vec{J} \times \vec{B} \parallel \sim \frac{B^2}{\mu \delta}$$

During an alternation of given sign ( $\Delta t \sim \omega^{-1}$ ), the relative velocity increment is

$$\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{B^2}{\rho \mu \delta V \omega} \sim \frac{\sigma B^2 \delta}{\rho V} = N_\delta$$

Thus  $N_\delta$  characterizes the degree of sensitivity of the fluid to pulsating forces. If  $N_\delta \ll 1$ , i.e. if  $\omega$  is high enough, the liquid metal is insensitive to the unsteady part of the electromagnetic forces and the pulsation of the magnetic field only appears through the skin effect. This explains why high frequency magnetic fields can lead to steady motions and stationary free surfaces as it is observed in the studies of Getselev, Szekely, Evans and Tarapore.

In such a context it is very tempting to consider infinitely high frequencies which prevent any penetration of the magnetic field in the liquid metal which may then be assumed to be perfectly conducting and submitted to a steady magnetic field with intensity equal to the r.m.s. value of the corresponding unsteady field. Sagardia studied the stability problem we are interested in, by using this schema. He found a stabilizing effect of the magnetic

field upon disturbances whose wavevector is parallel to the magnetic field, and a neutral effect upon disturbances whose wavevector is perpendicular to the magnetic field : this effect is closely analogous to the stabilising effect of a d.c. field at the boundary of a perfectly conducting fluid which is well known from the studies of instabilities of plasma confinement (see Bateman, 1978).

But, is such a schema quite realistic and representative of high frequency fields as those used in metallurgy where the skin depth does not reduce to a current sheet ? Does the conclusion hold for disturbances whose wave length is shorter than the skin depth ? What is the influence of the perturbation of the electromagnetic forces which is not reducible to a magnetic pressure as in Sagardia's assumption (see Moreau, 1978) ? It is the aim of this paper to answer these questions by examining this stability problem in the domain of frequencies of  $10^3 - 10^5$  Hz often encountered in industrial devices. In this domain the order of magnitude of  $R_\delta$  and  $N_\delta$  is often less than  $10^{-2}$ , and conditions (a) and (b) are valid and prevail upon those considered by Drazin.

The initial equilibrium state and the stability problem are precisely formulated in the following section. In the third section the equations of the motion linearized with respect to the small amplitude of the disturbance lead to a dispersion relation similar to the dispersion relation obtained in the classical Rayleigh-Taylor or Kelvin-Helmoltz problems, but with a new term in the expression of the external forces which characterizes the influence of the alternating magnetic field on the perturbation of the interface. This new term keeps a constant sign, whatever the values of the parameters may be, which leads to a stabilizing or neutral effect of the magnetic field.

## 2. FORMULATION OF THE PROBLEM

Let two inviscid fluids of densities  $\rho_j$ , ( $j = 1, 2$ ), be separated by an horizontal boundary at  $z = 0$ . The subscripts 1 and 2 distinguish respectively the lower and the upper fluid. The two fluids may be at rest or flowing in the same direction  $\vec{O}m$  with uniform velocities  $\vec{U}_j$ . An alternating magnetic field  $\vec{B}_2 = (B_0 \cos \omega t, 0, 0)$ , directed along  $\vec{O}x$ , (figure 1) is applied in the insulating fluid 2. According to the condition

$$(1) \quad R_\delta = \mu \sigma V \delta \sim \left(\frac{\mu \sigma}{\omega}\right)^{1/2} V \ll 1$$

the resulting magnetic field in the fluid 1, of finite electrical conductivity  $\sigma$ , governed by a pure diffusion mechanism satisfies :

$$(2) \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{B}_1$$

and is given, in the basic state, by

$$(3) \quad \vec{B}_1 = \left[ B_0 e^{z/\delta} \cos(\omega t + z/\delta), 0, 0 \right]$$

Let us introduce a perturbation which may be expanded in terms of normal modes. In the perturbed state the equation of the interface becomes

$$(4) \quad z_0 = \varepsilon(t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

where  $\vec{k}$  is a real vector  $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$  and where  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{ist}$  ( $s$  is a complex increment) is the local displacement of the interface ; because of the quasi steady approximation, at any time the magnetic field is independent of the motion of the fluid and is only governed by the interface geometry. Then, to determine the magnetic field it is convenient to consider  $\varepsilon$  as a constant.

The skin effect, through the mutual influence phenomena it introduces, plays a fundamental part in the stability problem. Hence, to lighten these phenomena, the skin depth  $\delta$ , however small it may be, must be taken as the typical length scale of the problem. Thus the amplitude  $\varepsilon$  of the perturbation is assumed to be small compared with  $\delta$  to enable the linearization of the equations with respect to the small parameter  $\varepsilon/\delta$ .

The magnetic field, the velocity and the pressure are affected by the perturbation of the interface and may be written :



$$\begin{aligned}
 (5) \quad \vec{B}_j &= \vec{B}_j + \vec{b}_j \\
 \vec{V}_j &= \vec{U}_j + \vec{v}_j \\
 P_j &= P_j + p_j
 \end{aligned}$$

where the small letters denote the perturbations of the different variables.

The boundary conditions, and especially the continuity across the interface of the pressure and of the normal component of the velocity, lead to seek these variables in the form :

$$(6) \quad g(z) e^{i(st + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Dealing with the magnetic field, the assumption that the permeability  $\mu$  of the two fluids is the same imposes the boundary condition across the perturbed interface between the two fluids of finite electrical conductivity

$$(7) \quad (\vec{B}_1)_{z=0} = (\vec{B}_2)_{z=z_0}$$

Then in the perturbed state, a discontinuity appears in the x component of the basic magnetic field which must be resorbed by the corresponding components of the magnetic field disturbance :

$$(b_{1x} - b_{2x})_{z=z_0} = (B_{2x} - B_{1x})_{z=z_0}$$

$$(8) \quad (b_{1y} - b_{2y})_{z=z_0} = 0$$

$$(b_{1z} - b_{2z})_{z=z_0} = 0$$

Since the disturbance  $\varepsilon$  is assumed to be small compared with  $\delta$ , it is possible to linearize the condition upon the x components with respect to  $\varepsilon/\delta$  :

$$(9) \quad (b_{1x} - b_{2x})_{z_0} = -i \frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2} \delta} (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2})$$

with :

$$(10) \quad \begin{cases} \theta_1 = (s + \omega)t + \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{\pi}{4} \\ \theta_2 = (s - \omega)t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Because of relation (9) it is natural to seek the magnetic field disturbance in the form :

$$(11) \quad \vec{b}_j = \vec{f}_j(z) e^{i\theta_1} + \vec{g}_j(z) e^{i\theta_2}$$

The Laplace equation for the upper fluid and the diffusion equation for the lower one, with the condition which imposes that all disturbances must vanish far from the interface, lead to the following expression for the perturbed solenoidal magnetic field :

$$(12) \quad \begin{aligned} \vec{b}_2 &= \vec{A} e^{i\theta_1 - kz} + \vec{C} e^{i\theta_2 - kz} \\ \vec{b}_1 &= \vec{M} e^{e\theta_1 + \gamma z} + \vec{N} e^{i\theta_2 + \gamma^* z} \end{aligned}$$

where  $\vec{A}$ ,  $\vec{C}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{N}$  are constant vectors and

$$(13) \quad \gamma^2 = k^2 + \frac{2i}{\delta^2}$$

and where  $\gamma^*$  denotes the complex conjugate of  $\gamma$ .

Finally the components of the magnetic field disturbance in the insulating and in the conducting fluid read :

$$(14) \quad \begin{cases} b_{2x} = i \frac{B_0 \epsilon}{\sqrt{2} \delta} \frac{k_x^2}{k} \left[ \frac{1}{\gamma+k} e^{i\theta_1} - \frac{1}{\gamma^*+k} e^{i\theta_2} \right] e^{-kz} \\ b_{2y} = i \frac{B_0 \epsilon}{\sqrt{2} \delta} \frac{k_x k_y}{k} \left[ \frac{1}{\gamma+k} e^{i\theta_1} - \frac{1}{\gamma^*+k} e^{i\theta_2} \right] e^{-kz} \\ b_{2z} = - \frac{B_0 \epsilon}{\sqrt{2} \delta} k_x \left[ \frac{1}{\gamma+k} e^{i\theta_1} - \frac{1}{\gamma^*+k} e^{i\theta_2} \right] e^{-kz} \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} b_{1x} = -i \frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2} \delta} \left[ \frac{k_y^2 + \gamma k}{k(\gamma + k)} e^{i\theta_1 + \gamma z} - \frac{k_y^2 + \gamma^* k}{k(\gamma^* + k)} e^{i\theta_2 + \gamma^* z} \right] \\ b_{1y} = i \frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2} \delta} \left[ \frac{k_x k_y}{k(\gamma + k)} e^{i\theta_1 + \gamma z} - \frac{k_x k_y}{k(\gamma^* + k)} e^{i\theta_2 + \gamma^* z} \right] \\ b_{1z} = -\frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2} \delta} \left[ \frac{k_x}{\gamma + k} e^{i\theta_1 + \gamma z} - \frac{k_x}{\gamma^* + k} e^{i\theta_2 + \gamma^* z} \right] \end{cases}$$

Interesting informations can be deduced from expressions (14) giving the perturbed magnetic field in the insulating fluid. Let us consider a disturbance whose wavevector is parallel to the magnetic field ( $k_y = 0$ ;  $k_x = k$ ). In this particular case, the magnetic field  $B_2$  is two dimensionnal and may be derived from a stream function  $\psi$  given by :

$$(16) \quad \psi = -\frac{B_0}{2} z (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + i \frac{B_0 \varepsilon}{\sqrt{2} \delta} \left( \frac{1}{\gamma + k} e^{i\theta_1} - \frac{1}{\gamma^* + k} e^{i\theta_2} \right) e^{-kz}$$

In the asymptotic case of very short wavelength disturbances ( $k\delta \rightarrow \infty$ ), this function reduces, to the lowest order in  $(k\delta)^{-1}$ , to :

$$(17) \quad \psi = -\frac{B_0}{2} z (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{1}{k\delta} x i \frac{B_0 \varepsilon}{2\sqrt{2}} (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}) e^{-kz}$$

when  $(k\delta)^{-1} \rightarrow 0$  the streamfunction coincides with the stream function in the basic state : the magnetic field lines remain parallel to  $O_x$  and cross the peaks of the perturbed interface which are then submitted to flux variations inducing a restoring force whose effect is to flatten the free surface. A stabilizing effect arises then in this case.

In the asymptotic case of very long wave length disturbances ( $k\delta \rightarrow 0$ ) the stream function reduces to :

$$(18) \quad \psi = -\frac{B_0}{2} z (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{B_0}{2} \varepsilon_0 (e^{i(s+\omega)t} + e^{i(s-\omega)t}) e^{ikx} e^{-kz}$$

which, using equation (4), may equivalently be written :

$$(19) \quad \psi = -\frac{B_0}{2} z \left( e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) + \frac{B_0}{2} z_0 \left( e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) e^{-kz}$$

Since  $k\varepsilon_0 \ll 1$ , along the interface  $z = z_0$

$$(20) \quad \psi = 0 + O(k\varepsilon_0)^2$$

The perturbed interface remains a magnetic field surface from which the magnetic field diffuses exactly as it did in the basic state and the induced electromagnetic forces are not modified. A neutral effect of the magnetic field is therefore to be expected. The case where the wavevector is perpendicular to the applied magnetic field leads obviously to the same conclusion.

It is to be noticed that these results, closely analogous to those relating to Sagardia's analysis, does not need any consideration for the mechanical properties of the two media : the stability problem is only governed by the interface geometry. The specific influence of the magnetic field ignores the mechanical properties of the two superposed media and the above conclusions hold for various media, elastic solids or non newtonian fluids for example. This fact is confirmed by the detailed analysis of Chapter 3.

Ampere's law easily gives the current density  $\vec{j}$  relating to  $\vec{b}$ . This induced current  $\vec{j} = \sigma \vec{e}$  originates only from the deformation of the interface which introduces the mutual influence phenomena between the conduction fluid and the external inductor. Other currents induced by the perturbed flow across the basic magnetic field lines and by the basic flow across those of the magnetic field disturbance are small because of the assumption that the magnetic Reynolds number is small. It is possible to precise this assertion by distinguishing three complementary parts of the actual perturbation of the current density :

- $\vec{j}_1 = \sigma \vec{e}_1$  induced by the deformation of the interface and independent of any fluid velocity.
- $\vec{j}_2 = \sigma(\vec{e}_2 + \vec{u} \times \vec{B})$  induced by the perturbed flow in the presence of the basic magnetic field.
- $\vec{j}_3 = \sigma(\vec{e}_3 + \vec{U} \times \vec{b})$  induced by the basic flow in the presence of the magnetic field disturbance.

Among the two possible length scales  $\delta$  and  $\lambda \sim 1/k$ , it is always the smaller (which we will denote  $\ell$ ) which governs the spatial variation of the magnetic field disturbance. Thus :

$$(21) \quad j_1 \sim \frac{B_0 \epsilon}{\mu \delta \ell} ; \quad j_2 \sim \sigma B_0 u ; \quad j_3 \sim \sigma B_0 U \frac{\epsilon}{\delta}$$

The vertical component of the velocity perturbation, (and, through the continuity equation, each component of the velocity perturbation) is related to the displacement of the interface :

$$(22) \quad w \sim \frac{U \epsilon}{\lambda} ; \quad u \sim v \sim \frac{U \epsilon}{\ell}$$

which leads to :

$$(23) \quad \frac{j_2}{j_1} \sim R_\delta ; \quad \frac{j_3}{j_1} \sim R_\delta \frac{\ell}{\delta}$$

Therefore,  $j_2$  and  $j_3$  are negligible compared with  $j_1$ .

The linearized expressions for the perturbation of the electromagnetic forces, in which the suffix 1 is suppressed, because only the conducting fluid is submitted to such forces, read :

$$(24) \quad \vec{F} = (J b_z ; j_z B_x ; -J b_x - j_y B_x)$$

where :

$$(25) \quad \begin{cases} j_y = i \frac{B_0 \epsilon}{\sqrt{2} \mu \delta} \left( \frac{k_x^2 - \gamma k}{k} e^{i\theta_1 + \gamma z} - \frac{k_x^2 - \gamma^* k}{k} e^{i\theta_2 + \gamma^* z} \right) \\ j_z = - \frac{B_0 \epsilon}{\sqrt{2} \mu \delta} k_y (e^{i\theta_1 + \gamma z} - e^{i\theta_2 + \gamma^* z}) \end{cases}$$

The condition  $N_0 \ll 1$  implies, as we demonstrated in section 1, that the conducting fluid cannot follow oscillating forces with frequency  $2\omega$ , and that only the average component (with respect to time scale  $\omega^{-1}$ ) of electromagnetic forces is to be retained. The forces are therefore given by :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x = i \frac{B_0^2 \epsilon k_x}{2\mu \delta^2} \left( \frac{e^{dz}}{\gamma+k} + \frac{e^{\alpha^* z}}{\gamma^*+k} \right) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \\ f_y = - \frac{B_0^2 \epsilon k_y}{4\mu \delta} \left[ (1-i) e^{\alpha z} - (1+i) e^{\alpha^* z} \right] e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \\ f_z = \frac{B_0^2 \epsilon}{2\mu \delta^2} \left\{ \left[ \frac{k^2 + \gamma k}{k(\gamma+k)} - \frac{1+i}{2} \frac{\delta}{k} (k_x^2 - \gamma k) \right] e^{\alpha z} + \left[ \frac{k^2 + \gamma^* k}{k(\gamma+k)} - \frac{1-i}{2} \frac{\delta}{k} (k_x^2 - \gamma k) \right] e^{\alpha^* z} \right\} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \end{array} \right.$$

where :

$$\alpha = \gamma + (1-i)/\delta$$

### 3. DISPERSION RELATION AND ANALYTICAL RESULTS

The equations of motion of the two incompressible and inviscid fluids subjected to electromagnetic forces are :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_j \frac{\partial \vec{V}_j}{\partial t} + \rho_j (\vec{V}_j \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_j = - \vec{\nabla} P_j + \vec{F}_j \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_j = 0 \end{array} \right.$$

After introduction of perturbations (defined in (5)) proportionnal to  $\epsilon = \epsilon_0 e^{i(st + \vec{k} \cdot \vec{r})}$  and linearization with respect to  $\epsilon_0/\delta$ , the elimination of the pressure leads to a second order differential equation for the amplitude of the vertical component of the velocity disturbance  $w_j(z)$  :

$$(28) \quad \rho_j (s + \vec{k} \cdot \vec{U}_j) (D^2 - k^2) w_j = i k^2 f_{jz} - D(\vec{k} \cdot \vec{F}_j)$$

The boundary conditions on  $w_j$  demand that it vanishes far from the interface in the two fluids :

$$(29) \quad w_1(z \rightarrow -\infty) \rightarrow 0 \quad w_2(z \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$$

and that the displacement of any point of the interface be unique and compatible with expression (4) for  $z_0(x,y,t)$  (see Chandrasekhar, 1961) :

$$(30) \quad \frac{w_1(z_0)}{s + \vec{k} \cdot \vec{U}_1} = \frac{w_2(z_0)}{s + \vec{k} \cdot \vec{U}_2} = i \epsilon_0 e^{i(st + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Then the dispersion relation follows from the condition of continuity of the shear stress normal to the interface which can be written :

$$(31) \quad (P_2 + p_2)_{z_0} = (P_1 + p_1)_{z_0} - Tk^2 z_0$$

if  $T$  stands for the surface tension.

After some algebra the expression of  $w_1(z)$  and  $w_2(z)$  which satisfy (22), (23) and (24) read to the first order in  $\epsilon$  :

$$(32) \quad \begin{cases} w_1(z) = \epsilon e^{kz} \{ i(s + \vec{k} \cdot \vec{U}_1) - w_0(z) \} + w_0(z) \\ w_2(z) = i \epsilon (s + \vec{k} \cdot \vec{U}_2) e^{-kz} \end{cases}$$

where  $w_0(z)$  represents the contribution of the particular solution of (28) with expressions (26) for the electromagnetic forces :

$$(33) \quad w_0(z) = - \frac{i B_0^2 k_x^2}{2\mu \delta^2 \rho_1 (s + \vec{k} \cdot \vec{U}_1)} \left( \frac{e^{\alpha z}}{\gamma(\gamma+k)} + \frac{e^{\alpha^* z}}{\gamma^*(\gamma^*+k)} \right)$$

Taking the divergence of the equations of motion leads to the equation for the perturbation of pressure :

$$(34) \quad i k^2 p_j = \rho_j (s + \vec{k} \cdot \vec{U}_j) D w_j + \vec{k} \cdot \vec{f}_j$$

In the unperturbed state the pressure verifies :

$$(35) \quad p_2 + \rho_2 g z = p_1 + \rho_1 g z + \left\langle \frac{B_1^2(z)}{2\mu} \right\rangle - \left\langle \frac{B_1^2(o)}{2\mu} \right\rangle$$

This expression is deduced from the hydrostatic equilibrium of the insulating fluid and from the magnetostatic equilibrium of the conducting one ; the brackets  $\langle \rangle$  mean that we only retain the mean value over a period according to our quasi-steady approximation.

Substituting (35) in (31) gives the condition at the interface for the perturbation of pressure :

$$(36) \quad (p_2 - p_1)_{z_o} - (\rho_2 - \rho_1) g z_o + \frac{B_o^2}{2\mu} \frac{z_o}{\delta} + T k^2 z_o = 0$$

Here the linearized expression of the magnetic pressure difference :

$$(37) \quad \left\langle \frac{B_1^2(z_o)}{2\mu} \right\rangle - \left\langle \frac{B_1^2(o)}{2\mu} \right\rangle = z_o \langle B_1(o) J_y(o) \rangle = \frac{B_o^2}{2\mu} \frac{z_o}{\delta}$$

has been taken into account and introduces in equation (36) the influence of the basic electromagnetic forces on the deformation of the interface. The dispersion relation is deduced from equations (34) and (36) :

$$(38) \quad \rho_1 (s + \vec{k} \cdot \vec{U}_1)^2 + \rho_2 (s + \vec{k} \cdot \vec{U}_2)^2 + g k (\rho_2 - \rho_1) - T k^3 - F(k, \theta) = 0$$



This relation is quite similar to its homologue in classical hydrodynamics, but a new term appears which is the net result of the electromagnetic effects :

$$(39) \quad F(k, \theta) = \frac{B_0^2 k^2}{2\mu\delta} + i \frac{\rho_1 (\vec{s} + \vec{k} \cdot \vec{U}_1)}{k} (w'_0(o) - k w_0(o)) + \frac{i}{k} (\vec{k} \cdot \vec{f}(o))$$

This function can be expressed in terms of the dimensionless wavenumber  $x = k\delta$  and of the angle  $\theta$  between the applied magnetic field and the wavevector :

$$(40) \quad F(k, \theta) = \frac{B_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\mu} F(x)$$

where :

$$(41) \quad F(x) = \frac{((x^4 + 4)^{1/2} + x^2)^{1/2} + (1-x)((x^4 + 4)^{1/2} - x^2)^{1/2}}{\sqrt{2} (x^4 + 4)^{1/2}}$$

A parallel may be drawn between the electromagnetic term and the term relating to surface tension : both are independent of the velocity field because they only depend on the geometry of the interface and are therefore independent of the mechanical properties of the fluids.

Sagardia's assumption which only considers an infinitely conducting fluid leads to the following corresponding electromagnetic term :

$$(42) \quad \frac{B_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{2\mu}$$

This is in perfect agreement with our analysis since  $F(x)$  tends to unity when  $x$  tends to zero with  $\delta$  (see figure 2).

The increment  $s$  is determined by a quadratic equation which has always two complex roots ; one leads to an amplification, the other to a damping down. Hence, to prevent any perturbation form being amplified it is necessary that the discriminant of equation (38) be positive or zero to insure that  $s$  be a real root :

$$(49) \quad - \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k^2 (U_1 - U_2)^2 \cos^2 \theta_1 + gk (\rho_1 - \rho_2) + Tk^3 + F(k, \theta) \geq 0$$

where  $\theta_1$  denotes the angle  $(\vec{U}_1, \vec{k})$

The influence of each of the four terms involved in relation (36) upon the evolution of a disturbance is to be specified :

- Whatever the values of  $U_1, U_2, \rho_1, \rho_2, \theta_1$ , the first term is always negative and therefore has a destabilizing effect. This term is responsible for the Kelvin-Helmholtz instability.

- The second term, whose sign is given by the difference  $\rho_1 - \rho_2$ , expresses the stabilizing or destabilizing effect of gravity according as  $\rho_1$  is superior or inferior to  $\rho_2$ . This term is responsible for the Rayleigh-Taylor instability.

- The third term is always positive. Then the surface tension, which opposes a restoring force to any displacement of the interface which tends to bend it, has a stabilizing effect. The stronger is the local curvature of the interface, the stronger is the stabilizing effect. Such an effect is specific to the plane geometry and it becomes destabilizing in an axisymmetric geometry for symmetric varicose deformations with wavelengths exceeding the circumference of the cylinder (CHANDRASEKHAR, 1961)

- The last term characterizes the presence of the electromagnetic field whose influence appears to be always stabilizing ( $F(x) \geq 0$  and  $F(x) \sim x^{-1}$  when  $x$  tends to infinity) except in the limit of very large wavelengths ( $x \rightarrow 0$  with  $k$ ) and of wavevectors perpendicular to the magnetic field ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) for which  $F(k, \theta)$  is zero. This effect is maximum when the skin depth is zero and is quickly decreasing when the skin depth increases (Fig. 2).

It is to be noticed that, if the effect predicted by the analysis supposing a zero skin depth is qualitatively good, from a quantitative point of view important corrections are to be made when physically realistic cases of finite electrical conductivities are considered. In particular one order of magnitude difference may appear between the two cases for the power to be provided to obtain the stabilization of the given wavelength  $\lambda$ . This is illustrated, for example, by the case  $\delta = 1,6$  cm and  $\lambda = 2\pi/k = 1$  cm ( $k\delta \sim 10$  and  $F(x) \sim 0,1$ ) : the power predicted by Sagardia's theory is  $P_0 (\sim B_0^2/\mu)$  but the influence of the finite electrical conductivity leads to  $10 P_0 (\sim B_0^2/\mu F(x))$ .

#### 4. CONCLUSION

The effect of a uniform alternating magnetic field on the stability of a plane interface between a conducting liquid and an insulating atmosphere has been investigated with a particular attention given to the analysis of the influence of the electrical conductivity of the liquid. This effect is always stabilizing except for large wavelength disturbances of the interface and for disturbances whose wavevectors are perpendicular to the applied magnetic field. For a given wavelength, this effect is maximum when the skin depth is zero (infinite electrical conductivity) and rapidly decreases when the skin depth increases. Differences appear then between the intensities of the alternating magnetic fields able to stabilize a given configuration deduced from theories assuming a zero skin depth and the theory taking skin effect into account. In some cases these differences may be so important that the order of magnitude of the power necessary to generate the magnetic field, whose intensity is deduced from the asymptotic theory, is wrong.

Though the analysis is limited to plane interfaces, the results are valuable in any cylindrical geometries if the skin depth  $\delta$  remains small compared to the typical radius  $R$  of the conducting medium. This study can be extended to the general case of liquid metal jets for any values of the parameter  $\delta/R$ . In cylindrical geometry surface tension tends to increase the local curvature of the perturbed interface and can compete with the stabilizing effect of the magnetic field.

In the scope of industrial application it is interesting to estimate the difference between a.c. devices and d.c. devices with regard to their respective stabilizing influences. The effect of an axial magnetic field on the capillary instability of a liquid metal jet gives a good example. Chandrasekhar's analysis conclusion for d.c. magnetic field is that "for experiments with mercury, magnetic fields of the order of  $10^4$  Gauss will be needed to demonstrate the stabilizing effect of an axial magnetic field" and  $3 \cdot 10^5$  Gauss, a really enormous field, is necessary "to overcome significantly the paramount effects of finite resistivity". With a d.c. axial magnetic field and mercury only  $10^3$  Gauss are sufficient to obtain a good stabilization. This illustrates the advantage of a.c. fields upon d.c. fields. Basically the difference is clear : the typical parameter of d.c. field effects is the magnetic Reynolds number  $R_m$  which is always small, whereas a.c. magnetic field effects are governed by the parameter  $R_\omega = \mu \sigma \omega L^2$  which may be large since high frequencies can compensate small conductivities.

REFERENCES

ALEMANY A. - MOREAU R.

"Ecoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant"  
Journal de Mécanique - 16 - 4 - 1977.

BATEMAN G.

"M.H.D. Instabilities"  
MIT Press - 1978

CHANDRASEKHAR

"Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"  
Oxford University Press - 1961.

DRAZIN P.G.

"Stability of parallel flow in an oscillating magnetic field"  
Quart. Journ. Mech. and Applied Math. - 1967 - XX - 2 - 201, 218.

ETAY J. - GARNIER M.

"Liquid metal columns confined by external parallel conductors"  
M.H.D. Flows and Turbulence - Israël University Press - 1981.

GETSELEV Z.N.

"Procédé de coulée continue et semi-continue de métaux et installation pour sa mise en oeuvre"  
Brevet n° 1 509 962 - B 22 d - 4 Oct. 1966.  
Kuibishevsky Metallurgichesky Zavod Imeni V.I. Lenina.

GETSELEV Z.N. - MARTYNOV G.I.

"Calculation of the velocity induced in the liquid phase of a casting by electromagnetic forces"  
Magnitnaya Gidrodinamika - 2 - 106-111 - 1975.

MOREAU R.

"M.H.D. flows driven by alternating magnetic fields"  
Proceedings of the Second Bat Sheva Seminar - 1978.

MOREAU R.

"Applications métallurgiques de la M.H.D."  
XVth ICTAM - Toronto - 1980.

OKRESS E.C. - WROUGHTON D.M. - COMENETZ G. - BRACE P.M. - KELLY J.C.F.

"Electromagnetic levitation of solid and molten metals"  
Journal of Applied Physics - 23-5. 545 - 1952.

ROBERTS B.

"On the hydromagnetic stability of an unsteady Kelvin Helmholtz flow"  
J. Fluid Mechanics - 59 - 1 - 65,76 - 1973.

SAGARDIA S.R.

"Electromagnetic levitation melting of large conductive loads"  
Ph. D. Thesis - University of Toronto - 1974.

SAGARDIA S.R. - SEGSWORTH R.S.

"Electromagnetic levitation melting of large conducting loads"  
I.E.E. Transactions on Industry Applications - 1A - 13 - 1 -  
49 - 1977.

SZEKELY J. - YADOYA R.T.

"The physical and mathematical modelling of the flow field in the  
mold region in continuous casting systems".  
Metallurgical Transactions B - 4B - 1379, 1388 - 1973.

TARAPORE E.D. - EVANS J.W.

"Fluid velocities in induction melting furnaces : theory and labo-  
ratory experiments"  
Metallurgical Transactions B - 7B - 343, 351 - 1976.

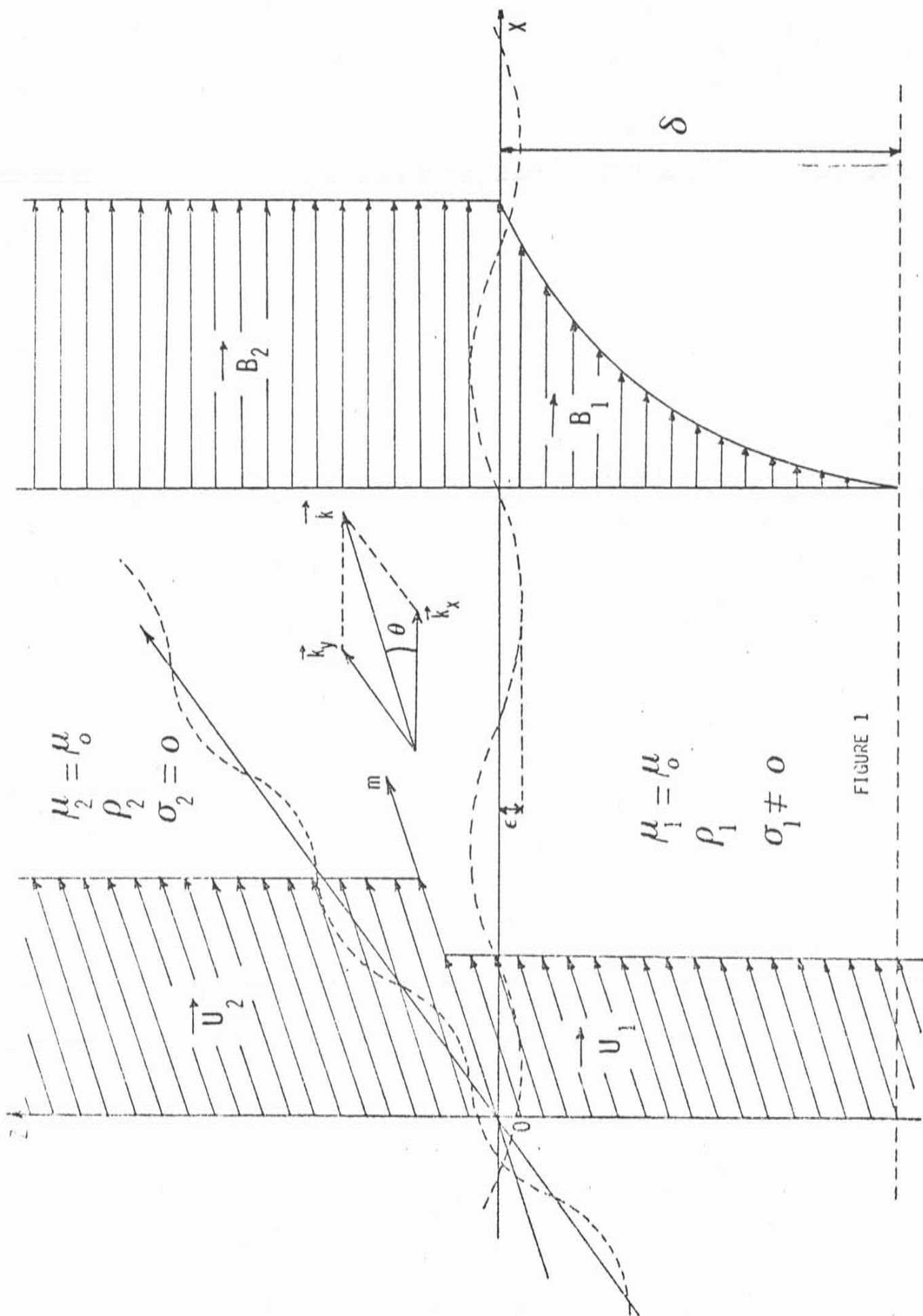
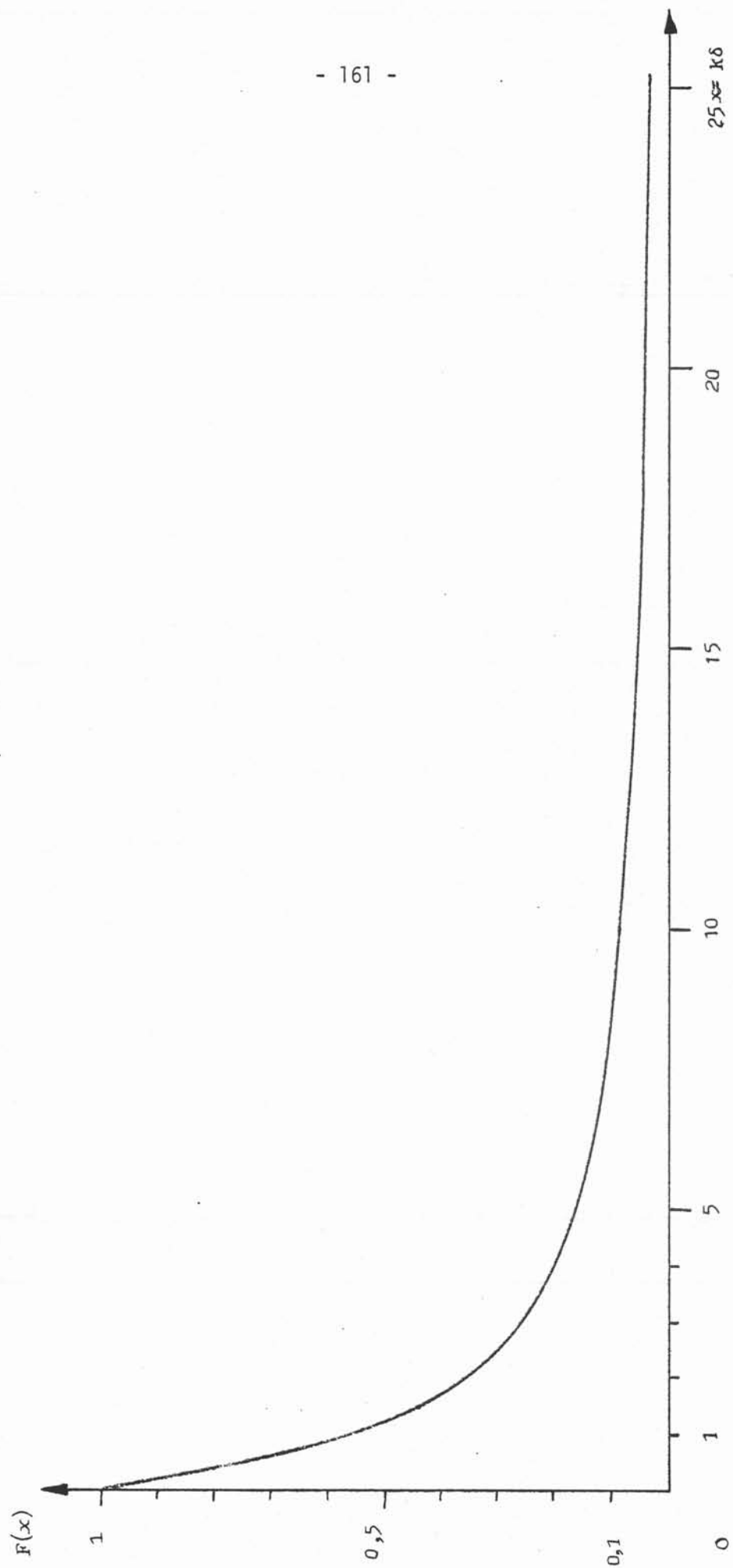


FIGURE 1



B I B L I O G R A P H I E

ALEMANY A. - MOREAU R.

*"Ecoulement d'un fluide conducteur de l'électricité en présence d'un champ magnétique tournant"*

Journal de Mécanique - 16 - 4 - 1977

BATEMAN G.

*"M.H.D. Instabilities"*

M.I.T. Press - 1978

BERKOVITZ J. - GRAD H. - RUBIN H.

*"Magnetohydrodynamic Stability"*

Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Peaceful Use of Atomic Energy - 1958

BERKOVITZ J. - FRIEDRICHS K.O. - GOERTZEL H. - GRAD H. - KILLEEN J. - AUBIN E.

*"Cusped Geometries"*

Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Peaceful Use of Atomic Energy - 1958

CHANDRASEKHAR

*"Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"*

Oxford University Press - 1981

DRAZIN P.G.

*"Stability of parallel flow in an oscillating magnetic field"*

Quart. Journ. Mech. and Applied Math. XX - 2 - 1967

ETAY J. - GARNIER M.

*"Liquid metal columns confined by external parallel conductors"*

M.H.D. Flows and Turbulence - Israël University Press - 1981.

GAILITIS A. - LIELAUSIS O.

*"Instability of homogeneous velocity distribution in an induction-type MHD machine"*

Magn. Gidrodinamika - 1 - 87 - 1975

GETSELEV Z.N.

*"Procédé de coulée continue et semi-continue de métaux et installation pour sa mise en oeuvre"*

Brevet n° 1-509-962-B22d - 1966

Kuibischevsky Metallurgichesky Zavod Imeni VI Lenina



GETSELEV Z.N. - MARTYNOV G.I.

*"Calculation of the velocity induced in the liquid phase of a casting by electromagnetic forces"*

Magn. Gidrodinamika - 2 - 106 - 1975

GETSELEV Z.N

*"Problems and development prospects in continuous casting in the electromagnetic mold"*

Tsvetnye Metally - 64 - 1977

GRAD H. - RUBIN H.

*"Hydromagnetic equilibria and force free fields"*

Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Peaceful Use of Atomic Energy - 1958

MELCHER J.R.

*"Continuum feedback control of instabilities on an infinite fluid interface"*

Phys. of Fluids - 9 - 10 - 1966

MELCHER J.R. - WARREN E.P.

*"Continuum feedback of a Rayleigh Taylor type instability"*

Phys. of Fluids - 9 - 11 - 1966

MOREAU R.

*"M.H.D. flows driven by alternating magnetic fields"*

M.H.D. Flows and Turbulence - Israël Univ. Press - 1978

MOREAU R.

*"Applications métallurgiques de la M.H.D."*

Proc. XV<sup>th</sup> ICTAM - Toronto - 1980

NAIDENOV A.F.

*"Problèmes liés à l'augmentation des quantités de liquides conducteurs lourds confinés dans des creusets électromagnétiques"*

Congrès de Riga (1972) - Comptes-Rendus de Conférence

OKRESS E.C. - WROUGHTON D.M. - COMENETZ G. - BRACE P.M. - KELLY J.C.F.

*"Electromagnetic levitation of solid and molten metals"*

J. of Applied Physics - 23 - 5 - 1952

ROBERTS B.

*"On the hydromagnetic stability of an unsteady Kelvin Helmholtz flow"*  
J. Fluid Mechanics - 59 - 1 - 1973

SAGARDIS S.R.

*"Electromagnetic levitation melting of large conductive loads"*  
Ph. D. Thesis - University of Toronto - 1974

SAGARDIA S.R. - SEGSWORTH R.S.

*"Electromagnetic levitation melting of large conductive loads"*  
Jeze Trans. on Industry Applications - 1A - 13 - 1977

SCHAFFER M.J.

*"Hydromagnetic surface waves with alternating magnetic fields"*  
J. Fluid Mech. - 33 - 2 - 1968

SNEYD A.D. - MOFFATT H.K.

*"The fluid dynamics of the process of levitation melting"*  
J. Fluid Mech. (à paraître 1982)

SZEKELY J. - JADOYA R.T.

*"The physical and mathematical modelling of the flow field in the mold region in continuous casting systems"*  
Metallurgical Transactions - B - 4 - 1973

TARAPORE E.D. - EVANS J.W.

*"Fluid velocities in induction furnaces : theory and laboratory experiments"*  
Metallurgical Transactions B - 7 - 1976

C H A P I T R E   I V

APPLICATION DE LA TECHNIQUE DU  
GROUPE DE RENORMALISATION A L'ETUDE DE  
LA TURBULENCE HOMOGENE MHD A FAIBLE  
NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE

-----



**Influence  
of an external magnetic field  
on large scale  
low magnetic Reynolds number  
MHD turbulence**

by

**M. GARNIER\*, A. ALEMANY\*,  
P. L. SULEM\*\* and A. POUQUET\*\***

---

**ABSTRACT.** — We investigate the properties of the very large scales of randomly stirred MHD turbulence at low magnetic Reynolds number in the presence of a uniform background magnetic field. For a suitable choice of the random forcing, the problem is solved by a singular perturbation technique, which is the fluid analog of the Renormalization Group calculation of critical dynamical phenomena. For any external magnetic field, large scales are quasi-two-dimensional and the non linear effects, when relevant, reduce to two eddy viscosities acting in the directions parallel and perpendicular to the magnetic field. A universal value is found for the ratio of these eddy viscosities. The convection of a passive scalar is also considered and a universal Prandtl number is obtained. The kinetic energy spectrum exponents are calculated and recovered by a phenomenological argument.

**RÉSUMÉ.** — Nous étudions l'effet d'un champ magnétique extérieur uniforme sur les plus grandes échelles d'une turbulence MHD à faible nombre de Reynolds magnétique, entretenue par des forces aléatoires. Pour un choix convenable de ces forces, le problème est résolu par une méthode de perturbation singulière qui est l'analogue de la méthode du Groupe de Renormalisation utilisée pour les phénomènes critiques dynamiques. Quelle que soit l'intensité du champ magnétique extérieur, les plus grandes échelles présentent un caractère quasi-bidimensionnel et les effets non linéaires, lorsqu'ils sont pertinents, peuvent être décrits par deux viscosités turbulentes agissant dans les directions parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. Une valeur universelle est obtenue pour le rapport de ces viscosités turbulentes. L'advection d'un scalaire passif par cette turbulence est également analysée et un nombre de Prandtl universel est mis en évidence. L'exposant du spectre d'énergie cinétique est calculé et retrouvé par un argument phénoménologique.

---

\* C.N.R.S., Institut de Mécanique de Grenoble, B.P. n° 53X, 38041 Grenoble Cedex.

\*\* C.N.R.S., Observatoire de Nice, B.P. n° 252, 06007 Nice Cedex.

# Table of notation

$B_0$ ,	external uniform magnetic field;
$R_m$ ,	magnetic Reynolds number;
$M$ ,	Hartmann number;
$\lambda_0$ ,	coupling constant;
$\bar{\lambda}$ ,	reduced coupling constant;
$u(x, t)$ ,	velocity field;
$p(x, t)$ ,	pressure;
$\rho_0$ ,	density;
$\nu_0$ ,	viscosity;
$\sigma$ ,	electrical conductivity;
$k, p, q, a$ ,	wavenumbers;
$\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}$ ,	wavevectors;
$\Lambda$ ,	ultraviolet cut-off for wavenumbers;
$\tau(k)$ ,	turn over time;
$E(k)$ ,	radial energy spectrum;
$\mathbf{f}$ ,	stirring force;
$-\varepsilon$ ,	spectral exponent of the stirring forces;
$D_0^{1/2}$ ,	intensity of the random forcing;
$\theta, \theta_p, \theta_q, \theta_a$ ,	angles between $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}$ and $\mathbf{B}_0$ ;
$\alpha, \beta, \gamma$ ,	internal angles of the $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ triangle;
$\xi, \tau, \eta$ ,	scaling factors;
$\nu_\perp, \nu_\parallel$ ,	components of the eddy viscosities;
$\bar{\alpha}$ ,	inverse Prandtl number;
$\chi$ ,	ratio of parallel to transverse viscosity.

## 1. Introduction

Electrically conducting incompressible flows, as described by the MHD equations, can be divided into two main classes according to the magnitude of the magnetic Reynolds number  $R_m$ . This dimensionless parameter which measures the relative importance of the advection of the magnetic field when compared to its diffusion is very large in most astrophysical objects, leading to the dynamo effect (magnetic field generation by hydrodynamic turbulence). In liquid metals in the laboratory conditions, in contrast,  $R_m$  is generally small and the induced magnetic field is weak compared to the

external field. Magnetic Reynolds numbers of order ten or more can however be expected in some large scale industrial equipments, such as the liquid coolant of nuclear breeder reactors. This can lead to possible technical problems linked to the dynamo effect [1].

At low magnetic Reynolds number, an external magnetic field  $B_0$  produces a scale independent anisotropic damping of the velocity field which tends to eliminate velocity gradients in the  $B_0$  direction. In duct flows in electromagnetic gaps, this effect is often concealed by instabilities due to M-shaped velocity profiles ([2] and references therein). An experimental investigation of the specific influence of the magnetic damping on homogeneous grid turbulence is discussed in [3]. Existing theories deal with the free evolution of turbulence in the presence of a strong magnetic field. As confirmed by direct numerical simulations [4], there is at first a linear phase of decay dominated by the anisotropic magnetic damping at the end of which turbulence has reached a quasi-two-dimensional configuration [5]. The subsequent dynamics can be viewed as a competition between magnetic damping and non linear transfer, when the kinematic Reynolds number is large enough [3].

A strong magnetic damping can also be obtained with a moderate magnetic field by considering sufficiently large scales. This is suggested by comparing the eddy turnover time  $\tau(k) = [k^3 E(k)]^{-1/2}$  at scale  $k^{-1}$ , where  $E(k)$  denotes the energy spectrum, to the (scale independent) magnetic damping time  $(\sigma B_0^2 \rho_0^{-1} \cos^2 \theta)^{-1}$ .

The latter will dominate for small enough wavenumbers  $k$  (which are not quasi transverse to the magnetic field), provided the energy spectrum is shallower than  $k^{-3}$ . The large scale properties of steady state turbulence can be investigated using the Renormalization Group (RG), a systematic technique introduced by Wilson in the context of phase transition and critical phenomena. It has been implemented in turbulence by Forster, Nelson and Stephen [6]. This technique requires the existence of a "crossover" for a specific parameter (the space dimension for critical phenomena) on one side of which the non linear effects are irrelevant (trivial case). The RG provides a method to calculate on the non trivial side, perturbatively in powers of the crossover parameter ([7], [8]). In turbulence, the crossover is more conveniently expressed in terms of the spectral exponent of the stirring force ([9], [10]). In this formulation, the RG has been applied to the study of isotropic MHD turbulence at finite magnetic Reynolds number [11] and to helical turbulence [12] which is defined in three dimensions only. The results of references [6] and [10] are recovered by a field theoretical approach in [13].

In Chapter 2, we exhibit a crossover for low magnetic Reynolds number turbulence in the large scale limit. Chapter 3 is concerned with the description of the RG procedure and its implementation to compute eddy viscosities and energy spectra. In Chapter 4, results are summarized and interpreted phenomenologically.

## 2. Existence of a crossover

This chapter exhibits a crossover for the relevance of the non linear effects in large scale low magnetic Reynolds number turbulence imbedded in a uniform magnetic field. The equation for the velocity field  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  reads:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \lambda_0 \left( \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) = \nu_0 \Delta \mathbf{v} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho_0} \Delta^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

The operator  $\Delta^{-1}$  denotes the inverse Laplacian which arises in the "quasi-static approximation" where the advection of the induced magnetic field is neglected ([14], p. 136). The coefficient  $\sigma$  is the electric conductivity,  $\rho_0$  the (uniform) density,  $\nu_0$  the kinematic viscosity;  $z$  denotes the coordinate in the direction of the external magnetic field. The coupling constant  $\lambda_0$ , taken equal to unity will play the role of a formal expansion parameter in the RG procedure. The modified pressure  $p$  includes the irrotational part of the Lorentz force. The stirring force  $\mathbf{f}$  is assumed to be a zero-mean Gaussian random function whose Fourier transform has a correlation given by:

$$(2) \quad \langle f_i(\mathbf{k}, \omega) f_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = D_0 \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'),$$

with a large scale ( $0 \leq k \leq \Lambda$ ) power law behaviour:

$$(3) \quad \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{k}) = k^{-\varepsilon} \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{k}/k).$$

A finite limit is assumed for  $\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{k})$  when the angle  $\theta$  between the wavevector  $\mathbf{k}$  and the external field  $\mathbf{B}_0$  approaches  $\pi/2$ . This corresponds to an injection spectrum per wavenumber which behaves like  $k^{2-\varepsilon}$  when  $k \rightarrow 0$ .

Using the following tilde dimensionless variables ( $\mu > 0$ ):

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = D_0^{1/2} \nu_0^{1/2} (\mu \Lambda)^{(5-\varepsilon)/2} \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = D_0^{1/2} \nu_0^{-1/2} (\mu \Lambda)^{(1-\varepsilon)/2} \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \\ \frac{1}{\rho_0} p(\mathbf{x}, t) = D_0 \nu_0^{-1} (\mu \Lambda)^{1-\varepsilon} \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \end{cases}$$



equation (1) reads:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\nabla} \tilde{p}) = \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} + M^2 \tilde{\Delta}^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{v}}}{\partial z^2} + \tilde{\mathbf{f}}, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \end{cases}$$

with:

$$(6) \quad \langle \tilde{f}_i(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\omega}) \tilde{f}_j(\tilde{\mathbf{k}}', \tilde{\omega}') \rangle = \mathcal{F}_{ij}(\tilde{\mathbf{k}}) \delta(\tilde{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{k}}') \delta(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}').$$

In equation (5):

$$(7) \quad \begin{cases} M = B_0 (\mu \Lambda)^{-1} (\sigma / \rho_0 \nu_0)^{1/2}, \\ R = \lambda_0 D_0^{1/2} \nu_0^{-3/2} (\mu \Lambda)^{-(1+\epsilon)/2}, \end{cases}$$

are respectively the Hartmann number and the Reynolds number.

The usual definition of the Reynolds number can be recovered when the rate of energy input at scale  $(\mu \Lambda)^{-1}$  is estimated in terms of  $D_0$  and  $\mu \Lambda$ . Notice that for any  $\epsilon$  and  $B_0$ , the local Hartmann number becomes infinite in the limit of very large scale ( $\mu \rightarrow 0$ ). For wavevectors which are not quasi-transverse to the external field, the magnetic damping will dominate the non linear effects for  $M^2/R \gg 1$  (or equivalently  $\epsilon < 3$ ) leading to a quasi-two-dimensional turbulence. This suggests the scaling:

$$(8) \quad \tilde{z} = MZ,$$

with in addition:

$$(9) \quad \begin{cases} F(\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}, z, \tilde{t}) = M^{-1/2} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}, \tilde{z}, \tilde{t}), \\ V(\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}, z, \tilde{t}) = M^{-1/2} \tilde{v}(\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}, \tilde{z}, \tilde{t}), \\ P(\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}, z, \tilde{t}) = M^{-1} \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}_{\perp}, \tilde{z}, \tilde{t}). \end{cases}$$

The subscript  $\perp$  (resp.  $\parallel$ ) refers to the direction perpendicular (resp. parallel) to the magnetic field. When the limit of very large scales ( $\mu \rightarrow 0$ ) is taken, we obtain:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial V_{\perp}}{\partial t} + \bar{\lambda}(\mathbf{V}_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{V}_{\perp} + \tilde{\nabla}_{\perp} P) = \tilde{\Delta}_{\perp} V_{\perp} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{-1} \frac{\partial^2 V_{\perp}}{\partial Z^2} + F_{\perp}, \\ \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{V}_{\perp} = 0, \\ \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial t} + \bar{\lambda} \mathbf{V}_{\perp} \cdot \tilde{\nabla}_{\perp} \mathbf{V}_{\parallel} = \tilde{\Delta}_{\perp} V_{\parallel} + \tilde{\Delta}_{\perp}^{-1} \frac{\partial^2 V_{\parallel}}{\partial Z^2} + F_{\parallel}, \end{cases}$$

where:

$$(11) \quad \bar{\lambda} = R/M^{1/2} = \frac{\lambda_0 D_0^{1/2}}{v_0^{5/4}} \left( \frac{\rho_0}{\sigma B_0^2} \right)^{1/4} (\mu \Lambda)^{-\varepsilon/2}.$$

Note that in this quasi-two-dimensional limit, parallel and transverse velocity components are decoupled and flows in different transverse planes interact only through the magnetic damping. The parameter  $\bar{\lambda}$  measures the relative importance of the non linear terms versus the dissipative terms for wavenumbers of order  $\mu \Lambda$ . A crossover thus arises at  $\varepsilon = 0$  for the relevance of the non linear terms in the large scale limit. For  $\varepsilon < 0$ , the coupling coefficient  $\bar{\lambda}$  tends to zero and the equation of motion reduces to a linear Langevin equation; for  $\varepsilon > 0$ , in contrast, the non linear terms predominate and we have to cope with a singular perturbation problem that the RG procedure intends to solve.

### 3. Renormalization group procedure

#### 3.1. The method

The equation of motion is written in Fourier space with wavenumbers extending from 0 to an ultraviolet cut off  $\Lambda$  (say the Kolmogorov scale). The Fourier modes of the velocity and forcing are separated into two groups. The first group for which the wavenumber  $k$  falls into the range  $\Lambda e^{-l} \leq k \leq \Lambda$  ( $l$  is a positive parameter) is labelled by the subscript  $>$ , and the second one ( $0 \leq k \leq \Lambda e^{-l}$ ) by  $<$ . Without any approximation, reference to velocity Fourier components  $v^>$  can in principle be suppressed by the following procedure: using the equation of motion,  $v^>$  is written in terms of  $v^<$  and of the stirring forces  $f^>$ . The expression for  $v^>$  is then substituted into the equation for  $v^<$  and the small scale forcing is averaged over. New couplings are generated by this procedure. In the resulting equation, the variables are then rescaled, in particular to restate the problem in the original wavenumber range  $[0, \Lambda]$ . The above procedure is useful if there exists a crossover: after iteration of the RG transformation, the non linear terms become essentially negligible on one side of the crossover; on the other side and sufficiently close to it, they will be small. This justifies the elimination of the small scales perturbatively in powers of the renormalized coupling constant, at least if it is small in the original equation. The procedure is in fact extended to any value of the coupling constant thanks to a

universality hypothesis for its asymptotic behaviour. In addition, most of the new couplings generated by the small scale elimination turn out to be negligible in the iteration.

### 3.2. Elimination of the small scales

After space and time Fourier transformation, equation (1) reads:

$$(12) \quad \hat{v}_i(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) f_j(\mathbf{k}, \omega) - i \frac{\lambda_0}{2} G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) P_{jmn}(\mathbf{k}) \times \int_{\substack{p, q < \Lambda \\ p+q=\mathbf{k}}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \hat{v}_m(\mathbf{q}, \Omega) \hat{v}_n(\mathbf{p}, \omega - \Omega).$$

The linear Green function  $G^{(0)}$  (where the projector on the space of divergence free functions which are statistically axisymmetric about the axis  $\mathbf{n} = \mathbf{B}_0/B_0$  is included) and the correlation  $\Phi$  of the external forcing are conveniently expressed in the local basis ([15], [16]):

$$(13) \quad \begin{cases} \mathcal{E}^1(\mathbf{k}) = \mathbf{e}^1(\mathbf{k}) \otimes \mathbf{e}^1(\mathbf{k}), \\ \mathcal{E}^2(\mathbf{k}) = \mathbf{e}^2(\mathbf{k}) \otimes \mathbf{e}^2(\mathbf{k}), \end{cases}$$

where:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{e}^1(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{n} / |\mathbf{k} \times \mathbf{n}|, \\ \mathbf{e}^2(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{e}^1(\mathbf{k}) / |\mathbf{k} \times \mathbf{e}^1(\mathbf{k})|. \end{cases}$$

Note that:

$$(15) \quad \mathcal{E}^1(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\perp(\mathbf{k}_\perp) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where  $\perp$  denotes the component perpendicular to the external field. For quasi-transverse wavevector  $\mathbf{k}$ , the only non zero component of  $\mathcal{E}^2(\mathbf{k})$  is:

$$(16) \quad \mathcal{E}_{33}^2(\mathbf{k}) = 1.$$

240 M. GARNIER, A. ALEMANY, P. L. SULEM AND A. POUQUET

In the  $\mathcal{E}$ -basis:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_{\alpha}(\mathbf{k}) \mathcal{E}^{\alpha}(\mathbf{k}), \\ G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^2 g_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) \mathcal{E}^{\alpha}(\mathbf{k}), \end{array} \right.$$

with:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = [-i\omega + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta + v_0 k^2]^{-1}, \\ \bar{B}_0^2 = \sigma B_0^2 / \rho_0. \end{array} \right.$$

As in Chapter 1, we choose:

$$(19) \quad \varphi_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}) = k^{-\varepsilon} \psi(\theta),$$

The elimination procedure of the modes  $v^>$  from equation (12) is where we have assumed that  $\psi(\theta)$  tends to unity as  $\theta \rightarrow \pi/2$  to keep the non linear effects finite.

conveniently done using the following diagrammatic representation:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{k}, \omega}{i} \underset{j}{\circ} = G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega), \\ -\zeta = f(\mathbf{k}, \omega), \\ \underset{i}{\circ} \xrightarrow{\mathbf{k}, \omega} \underset{j}{\circ} \xrightarrow{\mathbf{k}', \omega'} = D_0 \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'), \\ \underset{j}{\circ} \xrightarrow{\omega, \mathbf{k}} \underset{i}{\circ} \xrightarrow{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\Omega} = -i \frac{\lambda_0}{2} P_{jmn}(\mathbf{k}) \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}, \\ \xrightarrow{\mathbf{k}, \omega} = v(\mathbf{k}, \omega). \end{array} \right.$$

With these notations, equation (12) reads:

$$(21) \quad \xrightarrow{\quad} = \text{---}\zeta + \text{---}\underset{\circ}{\circ}$$

After elimination of  $v^>$ , the equation for  $v^<$  modes reads at the lowest non trivial order in  $\lambda_0$  when only the possibly relevant terms are retained:

$$(22) \quad \Rightarrow -4 \text{ (diagram)} \Rightarrow = \text{diagram} + \text{diagram} + 8 \text{ (diagram)} + 4 \text{ (diagram)}$$

The crossed lines indicate that the corresponding wavenumber belongs to the shell  $[\Lambda e^{-1}, \Lambda]$  and is consequently integrated over. In the following,  $\Lambda$  will be taken equal to unity. The left hand side of equation (22) is linear in the velocity field and at the lowest order the new diagram contributes to the renormalization of the viscosity which becomes a tensor with components in the  $\mathcal{E}$ -basis given by:

$$(23) \quad v_\alpha = v_0 + \delta v_\alpha.$$

It will be seen that  $\delta v_\alpha$  has a finite limite as  $k \rightarrow 0$ . Note that the magnetic field is not renormalized. On the right hand side of (22), the new diagrams correspond respectively to a renormalization of the stirring force and of the non linear coupling (vertex).

The diagram which renormalizes the viscosity gives:

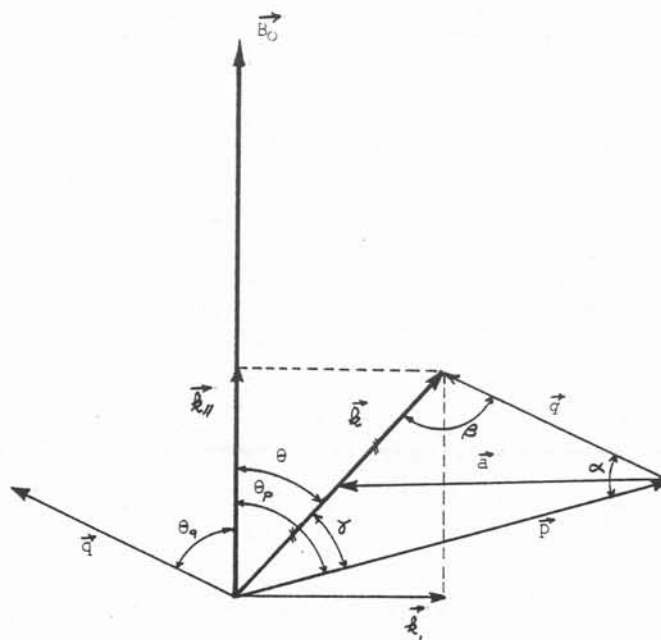
$$(24) \quad \text{Tr}(\mathcal{E}^\lambda)_{TT} k^2 \delta v_k = \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \delta \\ = 1, 2}} D_0 \lambda_0^2 \int_{\substack{p, q < \Lambda \\ p+q=k}} d^3 q P_{lmn}(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{mn}^\alpha(\mathbf{q}) \mathcal{E}_{mi}^\beta(\mathbf{q}) \mathcal{E}_{li}^\gamma(-\mathbf{q}) \\ \times P_{nis}(\mathbf{p}) \mathcal{E}_{nn'}^\delta(\mathbf{p}) \mathcal{E}_{ls}^\lambda(\mathbf{k}) \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^{-\varepsilon} \psi(\theta_q) d\Omega}{\left\{ \begin{aligned} &[-i\Omega + \overline{B}_0^2 \cos^2 \theta_q + v_\alpha q^2][i\Omega + \overline{B}_0^2 \cos^2 \theta_q + v_\gamma q^2] \\ &\times [-i(\omega - \Omega) + \overline{B}_0^2 \cos^2 \theta_p + v_\delta p^2] \end{aligned} \right\}}$$

where  $\theta, \theta_p, \theta_q$  denote the angles of wavevectors  $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$  with the external field (Fig. 1). As indicated in Chapter 2, the Hartmann number at scale  $1/k$  is expected to increase as  $k \rightarrow 0$ . This suggests to calculate the right hand side of (25) perturbatively in powers of the inverse Hartmann number  $v_0^{1/2}/\bar{B}_0$  and to check *a posteriori* the consistency of the procedure. The argument is similar to that which justifies the expansion in powers of the reduced coupling constant. To the leading order and for  $\cos \theta \rightarrow 0$ , equation (24) reduces to:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} k_{\perp}^2 \delta v_1(\mathbf{k}_{\perp}) &= D_0 \lambda_0^2 \int_{\substack{e^{-1} < p, q < 1 \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}}} d^3 q \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \\ &\quad \times P_{lmn}(\mathbf{k}_{\perp}) P_{mi}(\mathbf{q}_{\perp}) P_{nis}(\mathbf{p}_{\perp}) P_{ls}(\mathbf{k}_{\perp}) \\ &\quad \times \frac{q^{-\varepsilon}}{[\Omega^2 + (\bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_q + v_1 q^2)^2] [-i(\omega - \Omega) + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_p + v_1 p^2]}, \\ k_{\perp}^2 \delta v_2(\mathbf{k}_{\perp}) &= D_0 \lambda_0^2 \int_{\substack{e^{-1} < p, q < 1 \\ \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}}} d^3 q \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \\ &\quad \times \frac{q^{-\varepsilon}}{[\Omega^2 + (\bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_q + v_1 q^2)^2] [-i(\omega - \Omega) + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_p + v_2 p^2]}. \end{aligned} \right.$$

In this limit, the components 1 and 2 of the viscosity tensor act on the velocity mode respectively perpendicular and parallel to the magnetic field. Subscripts 1 (resp. 2) will thus be replaced in the following by  $\perp$  (resp.  $\parallel$ ). After simple algebra, equations (25) become ( $\mathbf{q} = \mathbf{k}/2 + \mathbf{a}$ ;  $\mathbf{p} = \mathbf{k}/2 - \mathbf{a}$ ):

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \delta v_{\perp} &= \frac{\lambda_0^2 D_0}{4(2\pi)^3} \int_{\Delta} \left\{ \frac{a^{-\varepsilon} \cos^2 \beta \sin^2 \beta}{[v_{\perp} a^2 + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_a]^2} \left[ -\varepsilon + \frac{4 \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_a}{v_{\perp} a^2 + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_a} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 a^{-\varepsilon} \bar{B}_0^2 \cos \theta \cos \theta_a \cos \beta \sin^2 \beta}{[v_{\perp} a^2 + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_a]^3} \right\} d^3 a, \\ \delta v_{\parallel} &= \frac{\lambda_0^2 D_0}{2(2\pi)^3} \int_{\Delta} \frac{a^{-\varepsilon} \sin^2 \beta d^3 a}{[v_{\perp} a^2 + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_a][v_{\parallel} a^2 + \bar{B}_0^2 \cos^2 \theta_a]}, \end{aligned} \right.$$




Notation.

where  $\theta_a$  denotes the angle of  $\mathbf{a}$  with  $\mathbf{B}_0$  and  $\beta$  the internal angle of the  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ -triangle opposed to the  $p$ -side (*Fig.*).  $\Delta$  is the domain  $\{e^{-1} \leq a \leq 1; 0 \leq \beta \leq \pi\}$ . Computation of integrals (26) leads to:

$$(27) \quad \begin{cases} \delta v_{\perp} = \frac{v_{\perp}^{(1-\varepsilon)}}{256 \pi} \left[ \frac{\lambda_0^2 D_0}{v_{\perp}^{5/2}} \frac{1}{B_0} \right] \frac{1-e^{\varepsilon t}}{\varepsilon}, \\ \delta v_{\parallel} = \frac{v_{\parallel}}{16 \pi} \frac{1}{\chi-1} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\chi+1}} \right) \left[ \frac{\lambda_0^2 D_0}{v_{\perp}^{5/2}} \frac{1}{B_0} \right] \frac{1-e^{\varepsilon t}}{\varepsilon}, \end{cases}$$

where  $\chi = v_{\parallel}/v_{\perp}$  is the ratio of the viscosities acting on the velocity components parallel and perpendicular to the magnetic field.

The diagram which renormalizes the force correlation  is  $O(k^2)$  when  $k \rightarrow 0$  and does not diverge when  $\theta \rightarrow 0$ . The internal forcing in the large scales (eddy noise) [17] due to the small-scale beating is thus negligible for  $\varepsilon > -2$  when compared to the external forcing.

The diagrams which renormalize the vertex appear to be negligible when compared to the "bare" vertex in the limit  $k \rightarrow 0$ . This is actually a consequence of Galilean invariance ([6], [13]).

### 3.3. Rescaling of variables

The second step of the RG procedure consists in rescaling the wavenumbers, frequency and remaining velocity modes. Turbulence being quasi-two dimensional in the large scales, different rescaling are expected for the wavevector components perpendicular and parallel to the magnetic field:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} k'_\perp = e' k_\perp, \quad k'_\parallel = k_\parallel \exp \left[ \int_0^l (1 + \xi(l')) dl' \right], \\ \omega' = \omega \exp \left[ \int_0^l \eta(l') dl' \right], \\ v' = v \exp \left[ - \int_0^l \tau(l') dl' \right], \quad f' = f \exp \left[ \int_0^l (\eta(l') - \tau(l')) dl' \right]. \end{array} \right.$$

The scaling factors  $\xi$ ,  $\eta$  and  $\tau$  are to be determined later. Equation (28) in turn implies the following rescaling:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_\alpha = v_\alpha \exp \left[ \int_0^l (\eta - 2) dl' \right], \quad \alpha = (1, 2), \\ D' = D_0 \exp \left[ \int_0^l (3\eta - 2\tau + 3 + \varepsilon + \xi) dl' \right], \\ \lambda' = \lambda_0 \exp \left[ \int_0^l (\tau - 4 - \xi) dl' \right], \\ B' = \bar{B}_0 \exp \left[ \int_0^l (\eta/2 - \xi) dl' \right]. \end{array} \right.$$

The combination of elimination of small scales and rescaling of the variables defines the RG transformation.

### 3.4. Iteration of the RG transformation: the recursion relations

The next step of the procedure consists in iterating the RG transformation. This is conveniently done by resorting to a differential form. Equations (28) and (29) lead to the following recursion relations



describing the evolution of the relevant parameters (viscosities, forcing intensity, coupling constant and magnetic field) as the infinitesimal RG transformation is iterated:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_{\perp}}{dl} = v_{\perp} [\eta - 2 + \psi_1(\bar{\lambda})], \\ \frac{dv_{\parallel}}{dl} = v_{\parallel} [\eta - 2 + \psi_2(\bar{\lambda}, \chi)], \\ \frac{dD}{dl} = D [3\eta - 2\tau + 3 + \varepsilon + \xi], \\ \frac{d\lambda}{dl} = \lambda [\tau - 4 - \xi], \\ \frac{d\bar{B}}{dl} = \bar{B} [\eta/2 - \xi], \end{array} \right.$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(\bar{\lambda}) = \frac{1}{256\pi} \bar{\lambda}^2 + O(\bar{\lambda}^4), \\ \psi_2(\bar{\lambda}, \chi) = \frac{\bar{\lambda}^2}{\chi(\chi-1)} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\chi+1}} \right) + O(\bar{\lambda}^4), \end{array} \right.$$

with:

$$(32) \quad \bar{\lambda}(l) = \frac{\lambda(l) D^{1/2}(l)}{v_{\perp}^{5/4}(l)} \frac{1}{\bar{B}_0^{1/2}(l)}, \quad \chi(l) = \frac{v_{\parallel}(l)}{v_{\perp}(l)}.$$

Note that the small scale elimination contributes only to the renormalization of the viscosities. The other coefficients are modified solely through the rescaling. This will remain so as long as  $\varepsilon > -2$ . When  $\varepsilon \leq -2$ , small scale elimination also renormalizes the forcing but this happens on the trivial (linear) side of the crossover.

One can suppress all reference to the scaling factors by writing recursion relations for the reduced parameters  $\bar{\lambda}$  and  $\chi$  defined in equation (32):

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\lambda}}{dl} = \bar{\lambda} \left[ \varepsilon - \frac{5}{2} \psi_1(\bar{\lambda}) \right], \\ \frac{d\chi}{dl} = \chi [\psi_1(\bar{\lambda}) - \psi_2(\bar{\lambda}, \chi)]. \end{array} \right.$$

As was expected from the analysis of Chapter 2, the first equation (33) exhibits a crossover at  $\varepsilon = 0$  for the behaviour of the reduced coupling constant  $\bar{\lambda}$  in the limit  $l \rightarrow \infty$ . For  $\varepsilon < 0$ ,  $\bar{\lambda}$  tends to zero and the problem is "asymptotically free" (linear) in the large scales. In contrast, for  $\varepsilon > 0$ ,  $\bar{\lambda}$  tends to a non trivial fixed point:

$$(34) \quad \bar{\lambda}^* = \left( \frac{512 \pi}{5} \varepsilon \right)^{1/2}.$$

Note that in equation (33), a Taylor expansion near the fixed point indicates that  $\bar{\lambda}$  approaches its asymptotic value as  $e^{-l/|\varepsilon|}$  for  $\varepsilon \neq 0$  and as  $l^{-1/2}$  for  $\varepsilon = 0$ .

For small positive  $\varepsilon$ , the non linear coupling is weak: the RG procedure has thus transformed a strongly non linear problem into a weakly non-linear one which can be solved perturbatively. Note that the procedure bootstraps since the smallness of  $\bar{\lambda}^*$  close to the crossover justifies, at least asymptotically, a perturbative elimination of the small scales.

We now determine the scaling factors. We can choose them in such a way that in the asymptotic equation ( $l \rightarrow \infty$ ), the transverse viscosity, the forcing intensity and the coupling constant keep their original values:

$$(35) \quad \begin{cases} \eta(l) = 2 - \psi_1[\bar{\lambda}(l)], \\ \tau(l) = 5 + \varepsilon - 3 \psi_1[\bar{\lambda}(l)], \\ \xi(l) = 1 + \varepsilon - 3 \psi_1[\bar{\lambda}(l)]. \end{cases}$$

This choice clearly shows that for  $\varepsilon > 0$  the Hartmann number:

$$\bar{B}(l)/v_1^{1/2}(l) = \lambda_0 D_0^{1/2} v_0^{-3/4} \bar{\lambda}(l)^{-1/2},$$

becomes of order  $\varepsilon^{-1/4}$  for  $l \rightarrow 0$ . This justifies the expansion in terms of its inverse. On the trivial side of the crossover ( $\varepsilon < 0$ ),  $\bar{\lambda}^* = 0$  and  $z \rightarrow 2$ . When  $\varepsilon = 0$ , the reduced coupling constant  $\bar{\lambda}$  tends to zero as  $(512 \pi/5)^{1/2}$  leading to logarithmic corrections in the energy spectra (see below). On the non trivial side of the crossover ( $\varepsilon > 0$ ), the stable fixed point corresponds to:

$$(36) \quad \psi_1(\bar{\lambda}^*) = 2\varepsilon/5,$$

which determines the scaling factors. Note that the scaling factors are thus independent of the detailed calculation of the diagrams. Indeed one has

only to know that (i) there exists a non trivial fixed point; (ii) there is no small scale contribution to the renormalization of magnetic field and forcing intensity (this is insured by the  $k$ -dependence of the Navier Stokes vertex); (iii) the vertex is not renormalized. The Wilson RG approach shows it perturbatively to lowest order but does not seem to be able to yield this result to all orders [6]. However, a non perturbative proof of the vanishing of vertex corrections is provided by the field theory formalism using a Ward Takahashi identity linked to Galilean invariance [13]. This insures the validity of the results beyond the proximity of the crossover, provided new couplings do not become relevant.

### 3.5. The effective equations

For negative or small positive  $\varepsilon$ , we can discard the non linear terms in the asymptotic equation. When we return to the unscaled variables, we obtain effective equations valid in the limit of (quasi-two-dimensional) large scales, which read:

$$(37) \quad \begin{cases} [-i\omega + \nu_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp}) k_{\perp}^2 + \overline{B}_0^2 \cos^2 \theta] v_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) = D_0^{1/2} f_{\perp}(\mathbf{k}, \omega), \\ [-i\omega + \nu_{//}(\mathbf{k}_{\perp}) k_{\perp}^2 + \overline{B}_0^2 \cos^2 \theta] v_{//}(\mathbf{k}, \omega) = D_0^{1/2} f_{//}(\mathbf{k}, \omega), \end{cases}$$

where the renormalized viscosities have a  $k$ -dependence given by:

$$(38) \quad \nu_{\perp}(\mathbf{k}) \sim \nu_{//}(\mathbf{k}) \propto k_{\perp}^{2-\eta}.$$

The scaling factor  $\eta$  has been determined in Section 3.4. On the trivial side, the renormalized viscosities are, as expected, independent of wavenumber whereas for  $\varepsilon > 0$  they behave like:

$$(39) \quad \nu_{\perp}(\mathbf{k}) \sim \nu_{//}(\mathbf{k}) \propto k^{-(2/5)\varepsilon}.$$

For  $\varepsilon = 0$ , the renormalized viscosities display logarithmic corrections:

$$(40) \quad \nu_{\perp}(\mathbf{k}) \sim \nu_{//}(\mathbf{k}) \propto \ln^{2/5}(1/k).$$

From the linear Langevin equations (37), one easily deduces the statistical properties of the velocity field and in particular the radial energy spectra of the

248 M. GARNIER, A. ALEMANY, P. L. SULEM AND A. POUQUET

velocity components perpendicular and parallel to the external field:

$$(41) \quad E_{\perp}(\mathbf{k}) \sim E_{\parallel}(\mathbf{k}) \propto \begin{cases} k^{1-\varepsilon}, & \varepsilon < 0, \\ k \ln^{1/5}(1/k), & \varepsilon = 0, \\ k^{1-(4/5)\varepsilon}, & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

These results obtained by a systematic technique will be recovered by a phenomenological argument in Chapter 4.

Finally, we note that the recursion relation for the parameter  $\chi$  gives at the non trivial fixed point:

$$(42) \quad \chi^* = 2.57 + 1.64 \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

The fixed point is approached exponentially, as is the case for  $\bar{\chi}$ . This indicates that for  $\varepsilon > 0$ , the ratio of the eddy viscosities acting on the velocity components parallel and perpendicular to the magnetic field has a well defined value  $\chi^*$  independent of the molecular viscosity.

We can also consider the convection of a passive scalar (say the temperature) by low magnetic Reynolds number turbulence. In the quasi-two-dimensional limit, computations are similar to those performed on the velocity component parallel to the magnetic field, except that the Green function of the passive scalar does not contain the magnetic damping. We find that for  $\varepsilon > 0$ , in the large scale limit, the ratio of the turbulent diffusivity to the eddy viscosity acting on the transverse velocity component (inverse Prandtl number) is given by:

$$(43) \quad \bar{\chi}^* = 2.79 + 1.73 \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Recall that when the passive scalar is advected by two dimensional Navier-Stokes turbulence, on the non trivial side of the crossover the ratio of the renormalized diffusivity to the renormalized viscosity is also found to be greater than unity [6]. Such an effect is possibly related to the pressure; it disappears on Burgers equation.

Keeping in mind experimental feasibility, a forcing spectrum confined to a narrow band of wavenumbers may appear more appropriate. This case is also amenable to the RG technique. After one step of the renormalization procedure, the large scale input is dominated by the eddy noise whose correlation function behaves like  $k^2$  for  $k \rightarrow 0$ . The renormalized coupling thus tends exponentially to zero making the Prandtl number and the ratio of the two components of the viscosity tensor non universal. The velocity field results from a balance between the eddy noise whose spectrum is proportional

to  $k^4$  and the dissipation due to (non renormalized) viscosity and Joule effect: the energy spectrum reads:

$$E(k) = \int \frac{k^4 \sin \theta d\theta}{\nu k^2 + \overline{B_0^2} \cos^2 \theta} \sim k^3.$$

This contrasts with the  $k^2$ -absolute equilibrium spectrum obtained with the same forcing in non magnetic turbulence [6].

#### 4. Concluding remarks

Large scale steady state properties of low magnetic Reynolds number turbulence imbedded in a uniform field have been investigated with the Renormalization Group. Assuming that for wavevectors quasi-transverse to the magnetic field, the correlation of the forcing behaves like  $k^{-\varepsilon}$  as  $k \rightarrow 0$ , we find that a stable non trivial fixed point appears above  $\varepsilon=0$ . For any external magnetic field, large scales are quasi-two-dimensional and the non linear effects can be described for  $\varepsilon>0$  by two eddy viscosities  $\nu_{\perp}(k) \sim \nu_{\parallel}(k) \sim k^{-2\varepsilon/5}$  acting respectively on the velocity components perpendicular and parallel to the magnetic field. Their ratio tends to a finite limit:

$$\chi^* = \frac{\nu_{\parallel}(k)}{\nu_{\perp}(k)} = 2.57 + 1.64 \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

which is independent of the molecular viscosity. The energy spectrum is then easily obtained.

The form of the eddy viscosities and energy spectrum can be recovered by a simple phenomenological argument. Let the eddy viscosity acting on eddies of size  $1/k$  be expressed in terms of the typical velocity  $(k E(k))^{1/2}$  of these eddies as:

$$(44) \quad \nu(k) \sim k^{-1} (k E(k))^{1/2}.$$

Assuming that the stirring force equilibrates the magnetic damping and the energy transfer, the following expression is obtained for the radial energy spectrum:

$$(45) \quad E(k) \sim \int \frac{D_0 k^{2-\varepsilon}}{\nu(k) k^2 + \overline{B_0^2} \varphi^2} d\varphi \sim \frac{D_0}{\overline{B_0}} \frac{k^{1-\varepsilon}}{(\nu(k))^{1/2}},$$

where  $\varphi = \pi/2 - \theta$ . Combining (44) and (45), the results of Chapter 3 are recovered, namely:

$$(46) \quad \begin{cases} v(\mathbf{k}) \sim \left( \frac{D_0}{B_0} \right)^{2/5} k^{-2\epsilon/5}, \\ E(\mathbf{k}) \sim \left( \frac{D_0}{B_0} \right)^{4/5} k^{1-4\epsilon/5}. \end{cases}$$

Notice that the main contribution to the radial energy spectrum [equation (45)] comes from wavevectors such that:

$$(47) \quad \varphi < \varphi^*(\mathbf{k}) \sim \left( \frac{D_0^{1/5}}{B_0^{6/5}} \right) k^{1-\epsilon/5}.$$

This contrasts with the linear problem for which  $\varphi^*(\mathbf{k}) \sim k/\overline{B}_0$ . For sufficiently small  $k$ , the energy containing region is thus enlarged by the non linear transfer.

The situation which seems the most amenable to experimental verification corresponds to a turbulence maintained by a forcing acting in a narrow band of wave-numbers. RG calculations predict in the large scales a  $k^3$  energy spectrum which can be viewed as resulting from an equilibrium between injection due to the beating of energetic eddies, and dissipation by Joule damping and viscosity. A flow of mercury, where turbulence is created by a grid with a small enough mesh, may have such a dynamics in the largest scales. One may also envisage direct numerical simulations of equation (1) using for example a spectral method. Flexibility in the choice of the forcing spectrum would lead easier comparison with the RG results.

Finally, it is interesting to notice that in all the cases, the anisotropic Joule dissipation makes the correlation functions of the velocity and vorticity fields not differentiable with respect to the wvector components in the limit  $k \rightarrow 0$ . As a consequence the behaviour at small wavenumbers cannot be predicted by kinematic analysis analogous to those given by Batchelor [18] and Saffman [19]. The Renormalization Group provides a procedure to deal with such singularities at small wavenumbers.

#### REFERENCES

- [1] LEORAT J., POUQUET A. and FRISCH U., *Turbulence M.H.D. développée et génération de champs magnétiques* [J. Phys., Vol. 41, (C3), 1980, p. 359-369]. *Fully Developed MHD Turbulence Near Critical Magnetic Reynolds Number* [J. Fluid Mech., Vol. 104, 1981, p. 419-443].

- [2] BRANOVER H. and GERSHON P., *Experimental Investigation of the Origine of Residual Disturbances in Turbulence MHD Flows after Laminarization* (J. Fluid Mech., Vol. 94, 1979, p. 629).
- [3] ALEMANY A., MOREAU R., SULEM P. L. and FRISCH U., *Influence of an External Magnetic Field on Homogeneous MHD Turbulence* (J. Méc., Vol. 18, 1979, p. 277).
- [4] SCHUMANN U., *Numerical Simulation of the Transition from Three to Two Dimension Turbulence under a Uniform Magnetic Field*. (J. Fluid Mech., Vol. 74, 1976, p. 31).
- [5] MOFFATT H. K., *On the Suppression of Turbulence by a Uniform Magnetic Field* (J. Fluid Mech., Vol. 28, 1977, p. 571).
- [6] FORSTER D., NELSON D. R. and STEPHEN M. J., *Long-Time Tails and the Large-Eddy Behaviour of a Randomly Stirred Fluid* (Phys. Rev. Lett., Vol. 36, 1976, p. 867); *Large-Distance and Long-Time Properties of a Randomly Stirred Fluid* (Phys. Rev., A Vol. 16, 1977, p. 732).
- [7] MA S., *Modern Theory of Critical Phenomena*, Frontiers in Physics, Benjamin Inc., 1976.
- [8] MA S. and MAZENKO G. F., *Critical Dynamics of Ferromagnets in 6-ε Dimensions: General Discussion and Detailed Calculation* (Phys. Rev., Vol. B11, 1975, p. 4077).
- [9] FOURNIER J.-D., *Quelques méthodes systématiques d'approximation en turbulence homogène* (Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Nice, 1977).
- [10] SULEM P. L., FOURNIER J. D. and POUQUET A., *Fully Developed Turbulence and Renormalization Group, 'in' Dynamical Critical Phenomena and Related topics* [Proceedings, Geneva 1979, p. 321 (Lecture Notes in Physics, Vol. 104, Springer-Verlag, 1979)].
- [11] FOURNIER J.-D., POUQUET A. and SULEM P. L., *Infrared Properties of Forced MHD Turbulence*, Submitted to J. Phys., A, 1980.
- [12] POUQUET A., FOURNIER J. D. and SULEM P. L., *Is Helicity Relevant for Large Scale Steady State Three-Dimensional Turbulence?* (J. Phys. Lettres, Vol. 39, 1978, p. 199).
- [13] DE DOMINICIS C. and MARTIN P. C., *Energy Spectra of Certain Randomly Stirred Fluids* (Phys. Rev., Vol. A19, 1979, p. 419).
- [14] ROBERTS P. H., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Longmans, Green and Co Ltd., 1967.
- [15] HERRING J. R., *Approach of Axisymmetric Turbulence to Isotropy* (Phys. Fluids, Vol. 17, 1974, p. 859).
- [16] SCHUMANN U. and HERRING J. R., *Axisymmetric Homogeneous Turbulence: a Comparison of Direct Spectral Simulations with the Direct Interaction Approximation* (J. Fluid, Mech., Vol. 76, 1976, p. 775).
- [17] ROSE H. A., *Eddy Diffusivity, Eddy Noise and Subgridscale Modeling* (J. Fluid Mech., Vol. 81, 1977, p. 719).
- [18] BATCHELOR G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, University Press, Cambridge, 1967.
- [19] SAFFMAN P. G., *The Large-Scale Structure of Homogeneous Turbulence* (J. Fluid Mech., Vol. 27, 1967, p. 581).

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1980,  
révisé le 10 octobre 1980.)





- [2] BRANOVER H. and GERSHON P., *Experimental Investigation of the Origine of Residual Disturbances in Turbulence MHD Flows after Laminarization* (J. Fluid Mech., Vol. 94, 1979, p. 629).
- [3] ALEMANY A., MOREAU R., SULEM P. L. and FRISCH U., *Influence of an External Magnetic Field on Homogeneous MHD Turbulence* (J. Méc., Vol. 18, 1979, p. 277).
- [4] SCHUMANN U., *Numerical Simulation of the Transition from Three to Two Dimension Turbulence under a Uniform Magnetic Field* (J. Fluid Mech., Vol. 74, 1976, p. 31).
- [5] MOFFATT H. K., *On the Suppression of Turbulence by a Uniform Magnetic Field* (J. Fluid Mech., Vol. 28, 1977, p. 571).
- [6] FORSTER D., NELSON D. R. and STEPHEN M. J., *Long-Time Tails and the Large-Eddy Behaviour of a Randomly Stirred Fluid* (Phys. Rev. Lett., Vol. 36, 1976, p. 867); *Large-Distance and Long-Time Properties of a Randomly Stirred Fluid* (Phys. Rev., A Vol. 16, 1977, p. 732).
- [7] MA S., *Modern Theory of Critical Phenomena, Frontiers in Physics*, Benjamin Inc., 1976.
- [8] MA S. and MAZENKO G. F., *Critical Dynamics of Ferromagnets in 6-ε Dimensions: General Discussion and Detailed Calculation* (Phys. Rev., Vol., B11, 1975, p. 4077).
- [9] FOURNIER J.-D., *Quelques méthodes systématiques d'approximation en turbulence homogène* (Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Nice, 1977).
- [10] SULEM P. L., FOURNIER J. D. and POUQUET A., *Fully Developed Turbulence and Renormalization Group*, 'in' *Dynamical Critical Phenomena and Related topics* [Proceedings, Geneva 1979, p. 321 (Lecture Notes in Physics, Vol. 104, Springer-Verlag, 1979)].
- [11] FOURNIER J.-D., POUQUET A. and SULEM P. L., *Infrared Properties of Forced MHD Turbulence*, Submitted to J. Phys., A, 1980.
- [12] POUQUET A., FOURNIER J. D. and SULEM P. L., *Is Helicity Relevant for Large Scale Steady State Three-Dimensional Turbulence?* (J. Phys. Lettres, Vol. 39, 1978, p. 199).
- [13] DE DOMINICIS C. and MARTIN P. C., *Energy Spectra of Certain Randomly Stirred Fluids* (Phys. Rev., Vol. A19, 1979, p. 419).
- [14] ROBERTS P. H., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Longmans, Green and Co Ltd., 1967.
- [15] HERRING J. R., *Approach of Axisymmetric Turbulence to Isotropy* (Phys. Fluids, Vol. 17, 1974, p. 859).
- [16] SCHUMANN U. and HERRING J. R., *Axisymmetric Homogeneous Turbulence: a Comparison of Direct Spectral Simulations with the Direct Interaction Approximation* (J. Fluid, Mech., Vol. 76, 1976, p. 775).
- [17] ROSE H. A., *Eddy Diffusivity, Eddy Noise and Subgridscale Modeling* (J. Fluid Mech., Vol. 81, 1977, p. 719).
- [18] BATCHELOR G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, University Press, Cambridge, 1967.
- [19] SAFFMAN P. G., *The Large-Scale Structure of Homogeneous Turbulence* (J. Fluid Mech., Vol. 27, 1967, p. 581).

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1980,  
révisé le 10 octobre 1980.)

CONCLUSION



La Magnétodynamique des liquides avec champs magnétiques alternatifs est une discipline qui présente l'avantage rare d'être à la fois très jeune et très riche. L'une de ses richesses revient au degré de liberté supplémentaire, par rapport à la M.H.D. avec champs magnétiques continus, introduit par le paramètre fréquence ; non seulement l'intensité et la géométrie du champ magnétique appliqué sont, comme en M.H.D. "classique", susceptibles d'être modifiés, mais, en plus, la fréquence des courants inducteurs peut être contrôlée de l'extérieur et varier dans une plage beaucoup plus large que celle des autres paramètres s'étendant du Hertz au Mégahertz. Aussi, dans chacun des domaines, qui se distinguent les uns des autres par l'ordre de grandeur du rapport entre la dimension caractéristique du domaine métallique liquide et l'épaisseur de peau, caractérisé par l'ordre de grandeur du paramètre d'écran  $R_\omega$ , se posent des problèmes tout à fait spécifiques. Dans les hautes fréquences ( $R_\omega \gg 1$ ) les effets électromagnétiques sont principalement des effets de surface et les forces induites dans le métal liquide peuvent être assimilées à des forces de pression ; dans les fréquences moyennes ( $R_\omega \sim 1$ ) le champ magnétique pénètre dans le milieu métallique, les forces rotationnelles prennent de l'importance et créent des courants de recirculation ; dans les basses fréquences ( $R_\omega \ll 1$ ) le champ magnétique traverse le domaine métallique et certains caractères spécifiques de l'action des champs magnétiques continus se retrouvent ; cependant, la pulsation des forces électromagnétiques généralement lente dans ce cas, peut avoir une influence sur la dynamique du milieu métallique et exciter certains modes privilégiés. Cette diversité qui concerne principalement les champs magnétiques pulsants (ou monophasés), s'enrichit grâce à la possibilité d'utiliser des champs magnétiques polyphasés (glissants ou tournants) qui favorisent, contrairement aux précédents, la partie rotationnelle des forces électromagnétiques aux dépens de la partie irrotationnelle et permettent d'imposer et de contrôler le mouvement du métal liquide.

Le problème de contrôle des surfaces libres, dont certains aspects avaient déjà été abordés dans ma thèse de Docteur-Ingénieur, constitue dans ce contexte un axe privilégié. Le cas asymptotique des fréquences infiniment grandes pour lesquelles la profondeur de pénétration du champ magnétique est nulle, met en lumière l'originalité du problème : la frontière du métal liquide sépare deux régions

concernées, l'une par la mécanique des fluides (intérieur du milieu métallique, l'autre par l'électromagnétisme. C'est par le couplage au niveau des conditions aux limites à l'interface, sur la pression notamment que s'introduit toute la difficulté mais aussi tout l'intérêt de la question posée par la détermination des caractéristiques géométriques de la surface libre d'équilibre et de l'écoulement induit dans le milieu métallique liquide.

Mes travaux dans ce domaine, accomplis en collaboration avec Jacqueline ETAY et Jean-Marc BIASSE, et effectués dans le cadre de l'opération de recherche "contrôle de surfaces libres" ont permis de dégager et de préciser les idées fondamentales et les mécanismes de bases dans l'étude des équilibres complexes des interfaces dont la géométrie résulte de la compétition entre les forces électromagnétiques, la tension superficielle (cas du formage des jets), la gravité (cas de la lévitation), les forces d'inertie (cas du confinement). L'étude de la stabilité de ces équilibres accomplie dans des conditions réalistes de fréquence et de conductivité électrique finie, a conduit à l'explication de l'effet stabilisant du champ magnétique et à la correction des critères de stabilité déduits de l'analyse reposant sur l'hypothèse d'une profondeur de peau nulle.

Nombreuses sont les applications industrielles possibles de la Magnéto-dynamique des liquides qui sont apparues parallèlement à ces études théoriques et ont fait l'objet de brevets protégeant des dispositifs nouveaux et des techniques nouvelles mis au point en laboratoire. Ceci est également un avantage de la discipline dans laquelle les travaux ont été menés. Il faudrait cependant se garder de ne retenir que cet aspect très positif de la Magnétodynamique des liquides, en oubliant la richesse si grande qui est la sienne sur un plan purement scientifique.

-----











## RESUMÉ

La possibilité de contrôler la forme et la position de la surface libre d'un milieu métallique liquide à l'aide de champs magnétiques alternatifs est mise en évidence par des voies théoriques et expérimentales. Deux aspects complémentaires du problème de frontière libre posé sont abordés ; le problème direct, qui consiste à déterminer la forme d'équilibre de la surface libre d'un domaine soumis à l'action d'un inducteur de caractéristiques données ; le problème inverse, qui vise à déterminer les caractéristiques électriques et géométriques de l'inducteur susceptible d'imposer une géométrie d'équilibre fixée par avance.

Les critères de stabilité des surfaces libres ainsi contrôlées, par des champs magnétiques alternatifs ou glissants sont déduits d'une analyse linéaire : l'effet du champ magnétique est trouvé stabilisant ou neutre. Les techniques du Groupe de Renormalisation sont utilisées pour étudier les propriétés des grandes échelles d'une turbulence homogène MHD à petit nombre de Reynolds magnétique. L'anisotropie de cette turbulence quasi-bidimensionnelle est caractérisée par le calcul du rapport des viscosités turbulentes dans les directions parallèle et perpendiculaire au champ magnétique appliqué.

## MOTS-CLES

Magnétodynamique des liquides ; Champs magnétiques alternatifs ; Induction ; Peau électromagnétique. Frontière libre ; Contrôle de forme ; Stabilité d'interface ; Turbulence ; Groupe de Renormalisation.